MESSUNG DER WÄRMELEITFÄHIGKEIT VON CL_2 UND O_2 IM TEMPERATURBEREICH THERMISCHER DISSOZIATION

DISSERTATION

zur Erlangung des Grades eines
Doktor-Ingenieurs
der Abteilung für Elektrotechnik
an der Ruhr-Universität Bochum

von

A. KURTZ

Berlin

Bochum, den 13. 1. 1982

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41549226_0047

MESSUNG DER WÄRMELEITFÄHIGKEIT VON CL_2 UND O_2 IM TEMPERATURBEREICH THERMISCHER DISSOZIATION

DISSERTATION

zur Erlangung des Grades eines
Doktor-Ingenieurs
der Abteilung für Elektrotechnik
an der Ruhr-Universität Bochum

von

A. KURTZ

Berlin

Bochum, den 13. 1. 1982

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Dissertation eingereicht am: 13.1.1982

Tag der mündlichen Prüfung: 17.2.1982

Referent: Prof. Dr. rer. nat. J. Mentel

Koreferent: Prof. Dr. phil. S. Blume

Diese Arbeit wurde am Lehrstuhl für Allgemeine Elektrotechnik und Elektrooptik der Ruhr-Universität Bochum durchgeführt.

Herrn Prof. Dr. rer. nat. J. Mentel danke ich für das Thema und die intensive Betreuung dieser Arbeit.

Ebenfalls möchte ich allen Mitarbeitern des Lehrstuhls für ihre Unterstützung danken, insbesondere den Mitarbeitern der Werkstätten für ihre Hilfe beim Aufbau des Experiments.

Danken möchte ich auch der Deutschen Forschungsgemeinschaft für die finanzielle Unterstützung.

Für die ideenreiche Herstellung der komplizierten Quarz-Bogengefäße möchte ich Herrn F. Pfeil würdigen, der die Fertigstellung dieser Arbeit nicht mehr erleben konnte.

Inhalt

		Seite
0.	Zusammenfassung	1
1.	Einleitung	2
2.	Bogenaufbau	5
2.1	Das Bogengefäß	5
2.2	Betrieb der Bogenentladung	8
2.3	Kürzung des Bogengefäßes	9
3.	Die optische Meßmethode	10
3.1	Die holographische Interferometrie	10
3.2	Differentialinterferometrie	16
3.2.1	Das Prinzip der Differentialinterferometrie	17
3.2.2	Erzeugung von Differentialinterferogrammen	22
3.3	Der optische Aufbau	24
3.3.1	Der holographische Aufbau	24
3.3.2	Die optische Registrierung	28
3.4	Fehler aufgrund der Lichtbrechung	30
3.4.1	Ablenkung der Lichtstrahlen durch Brechungsindexgradienten	31
3.4.2	Wahl der Abbildungsebene	35
4.	Messung und Auswertung der Wärmeleitfähigkeit	37
4.1	Ergebnisse der Messungen	37
4.1.1	Ergebnisse für die Bogenleistung	37
4.1.2	Ergebnisse der optischen Messungen	39
4.2	Die Leistungsbilanz in Lichtbögen	39
4.3	Brechungsindex als Temperaturfunktion	43
4.4	Probleme der Temperaturbestimmung	46
4.4.1	Zur Abweichung der mittleren Molekülpolarisierbarkeiten bei höheren Temperaturen	47
4.4.2	Zur Absolutbestimmung des Brechungsindexes und Bestimmung der atomaren Polarisierbarkeit α_A	48

Seite

4.4.2.1	Bestimmung der Temperatur des Maximums	48
4.4.2.2	Bestimmung des Ortes r_{max} für das Maximum der Wärmeleitfähigkeit	51
4.4.2.3	Bestimmung der atomaren Polarisierbarkeit α_A von Chlor	59
4.5	Wärmeleitfähigkeit	63
4.6	Fehlerdiskussion	68
4.6.1	Systematische Fehler	68
4.6.2	Fehler durch Meßungenauigkeiten	69
5.	Anhänge	72
A.	Zur Auswertung der Differential-interferogramme	72
B.	Berechnung der Gaszusammensetzung	78
C.	Reaktionswärmeleitfähigkeit	82
6.	Literaturverzeichnis	86

0. Zusammenfassung

Mit einem holographischen Interferometer und einem Differentialinterferometer werden Temperaturmessungen im nichtleuchtenden Bereich wandstabilisierter Chlor- und Sauerstoffbögen durchgeführt. Als Entladungsgefäß dienen Quarzrohre mit 12 bzw. 18 mm Innendurchmesser, die speziell für Bögen in aggressiven Gasen und für die optischen "end on"-Messungen entwickelt wurden.

Das besondere Kennzeichen der Meßverfahren ist, daß der sehr störende Beitrag der Endräume im Entladungsgefäß durch die optische Differenzbildung zwischen Messungen an verschiedenen langen Rohren eliminiert werden kann.

Es werden die Fehler diskutiert, die dadurch entstehen, daß die Brechungsindexgradienten das Licht ablenken. Als Ergebnis wird eine obere Grenze für die Länge des Bogengefäßes und ein geeigneter Ort für die Abbildungsebene angegeben.

Mit Hilfe der kinetischen Gastheorie kann der Verlauf der Reaktionswärmeleitfähigkeit bis auf einen Faktor, dem Stoßquerschnitt zwischen Atomen und Molekülen, angegeben werden. Diese Information und die daraus abgeleitete Temperatur des Maximums der Wärmeleitfähigkeit wird benutzt, um die Polarisierbarkeit des Chloratoms und den absoluten Brechungsindexverlauf im Bogengefäß zu bestimmen. Damit wird der radiale Temperaturverlauf und der Verlauf der Wärmeleitfähigkeit zwischen 2500 K und 6000 K für Sauerstoff und zwischen 1500 K und 3500 K für Chlor ermittelt.

1. Einleitung

In einer wandstabilisierten Niederstrombogenentladung wird zwischen dem hell leuchtenden Bogen und der wassergekühlten Wand der Temperaturbereich von ca. 10 000 K bis 1 000 K erzeugt. Der radiale Temperaturverlauf wird dabei durch die Transporteigenschaften des Gases bestimmt. Bei Gastemperaturen unter 10 000 K liefert die Strahlung in der Regel keinen Beitrag zum Energietransport. Die in der leitenden Bogensäule umgesetzte elektrische Leistung wird allein durch Wärmeleitung an das Kühlwasser abgegeben.

Bei Molekülgasen, deren Dissoziationsenergie deutlich niedriger als die Ionisationsenergie ist, sind die Temperaturbereiche thermischer Dissoziation und Ionisation räumlich voneinander getrennt. Der Dissoziationsbereich umfaßt die nicht leuchtenden und stromfreien Randzonen der Entladung. Die Gaszusammensetzung ist mit der Temperatur ortsabhängig.

Aufgrund der Partialdruckgradienten diffundieren Moleküle in Richtung des Temperaturanstiegs und umgekehrt Atome in Richtung des Temperaturgefälles. Bei niedrigen Temperaturen rekombinieren die Atome, wobei die Dissoziationsenergie freigesetzt wird. Dieser mit den Diffusionsströmen verknüpfte Transport von Reaktionsenergie liefert im Temperaturbereich thermischer Dissoziation einen zusätzlichen Beitrag zur Wärmeleitfähigkeit. Er ist für das ausgeprägte Maximum in diesem Bereich verantwortlich.

Die erhöhte Wärmeleitfähigkeit bei Molekülgasen wird bereits durch eine starke Einschnürung des leitenden Bogenkanals und damit des leuchtenden Bereiches sichtbar. Denn die stark überhöhte Wärmeleitfähigkeit reduziert den Temperaturanstieg in der Nähe der Gefäßwand. Somit wirken sich die

thermischen Eigenschaften des Gases auf die Bogenleitfähigkeit und damit auch auf die Leistungsaufnahme des Lichtbogens aus.

In diesem Punkt liegt die Bedeutung von Molekülgasen für den Schalterbau und für die Lampentechnik. Die Kenntnis der Materialfunktionen solcher Gase ist daher in diesen Anwendungsbereichen sehr nützlich.

In dieser Arbeit wird die Wärmeleitfähigkeit von O_2 und Cl_2 im Dissoziationsbereich experimentell untersucht. Während die Wärmeleitfähigkeit von O_2 als Bestandteil der Luft für Schaltlichtbögen eine Rolle spielt, wird Cl_2 als Füllgas in Lampen benutzt. Die Wärmeleitfähigkeit von Chlor ist bisher nur bis 700 K gemessen worden /1/. Weitere Daten sind nicht vorhanden. Für die Transporteigenschaften von O_2 im Dissoziationsgebiet liegen gaskinetische Berechnungen von zwei Autoren vor /2,3/. Bis 1500 K sind Messungen bei Geier und Schäfer /4/ beschrieben, und ab 6000 K liegen experimentelle Daten über die Wärmeleitfähigkeit von Herrmann /5/ vor. Für den dazwischenliegenden Dissoziationsbereich sind bisher keine Messungen bekannt.

Zur Bestimmung der Wärmeleitfähigkeit außerhalb des leitenden Bogenkanals wird der integrale Leistungsumsatz im Bogen, der radiale Temperaturverlauf sowie der radiale Temperaturgradientenverlauf zwischen Bogen und Gefäßwand benötigt. Weil die Methoden der Emissionsspektroskopie hier versagen, muß die Temperaturverteilung aus der Gasdichte ermittelt werden.

Bei zylindersymmetrischen Lichtbögen ist der Brechungsindex parallel zur Bogenachse konstant. Es liegt daher nahe, diese Bögen "end on" mit parallelem Fremdlicht zu durchstrahlen

und dessen Phasenänderung infolge der Temperaturabhängigkeit des Brechungsindexes interferometrisch und differentialinterferometrisch zu messen.

Neben einem speziellen Bogengefäß für Cl_2 und O_2 wird in dieser Arbeit ein holographisches Interferometer beschrieben, das zusammen mit einem angeschlossenen differentialinterferometrischen Aufbau die Information über den radialen Brechungsindex- und Brechungsindexgradientenverlauf in dem Bogengefäß liefert. Zur Erhöhung der Genauigkeit der Endergebnisse werden bei der Auswertung der Meßergebnisse allgemeine Kenntnisse aus der kinetischen Gastheorie benutzt.

Das skizzierte Meßprinzip wurde erstmals zur Messung der Dissoziationswärmeleitfähigkeit von Wasserstoff mit einem von Wolter /6/ angegebenen Schlierenaufbau benutzt /7/.

2. Bogenaufbau

Der Temperaturbereich thermischer Dissoziation liegt bei Chlor im Bereich 1500 K bis 3000 K, bei Sauerstoff zwischen 3000 K und 5000 K. Temperaturen in diesem Bereich existieren in wassergekühlten Rohren, in deren Achse Bögen mit Stromstärken von einigen Ampères brennen. In der Bogenachse wird das Gas durch elektrische Leistungszufuhr so stark aufgeheizt, daß es thermisch ionisiert und damit zu einem elektrischen Leiter wird. Dabei werden bei den verwendeten Stromstärken Temperaturen von ca. 8000 K erreicht. Die Bogenleistung wird durch Wärmeleitung an die wassergekühlte Wand abgeführt. Zwischen ihr und der Bogensäule erstreckt sich der Bereich thermischer Dissoziation.

2.1 Das Bogengefäß

Das verwendete Lichtbogengefäß ist in Abb. 2.1 dargestellt. Der gesamte Bogen, der bei Atmosphärendruck betrieben wird, ist in fünf Teilbögen unterteilt. Den Hauptteil bildet die in der Mitte des Hauptrohres auf der Strecke zwischen den Seitenarmen brennende Chlor- bzw. Sauerstoffbogensäule. Diese wird vertikal im Versuchsaufbau angeordnet. Die beiden Enden des Rohres sind mit abnehmbaren Fenstern optischer Qualität abgeschlossen. Am unteren Ende befindet sich der Anschluß für das Testgas, durch den ein kontinuierlicher Gasstrom eingelassen wird. Durch den Gaseinlaß außerhalb der Bogensäule werden Störungen des Bogenplasmas und damit der radialen Symmetrie der Temperaturverteilung infolge seitlichen Anströmens vermieden. Der konvektive Auftrieb reicht aus, um das Testgas bis in den oberen Endraum zu treiben, so daß das Rohr voll mit dem Testgas ausgefüllt ist. Die Höhe des Endraumes unterhalb des oberen Fensters wurde möglichst klein gehalten, um die Ausbildung von Konvektionsinstabilitäten - sogenannte Benardinstabilitäten - in der von unten geheizten Gasschicht zu vermeiden.

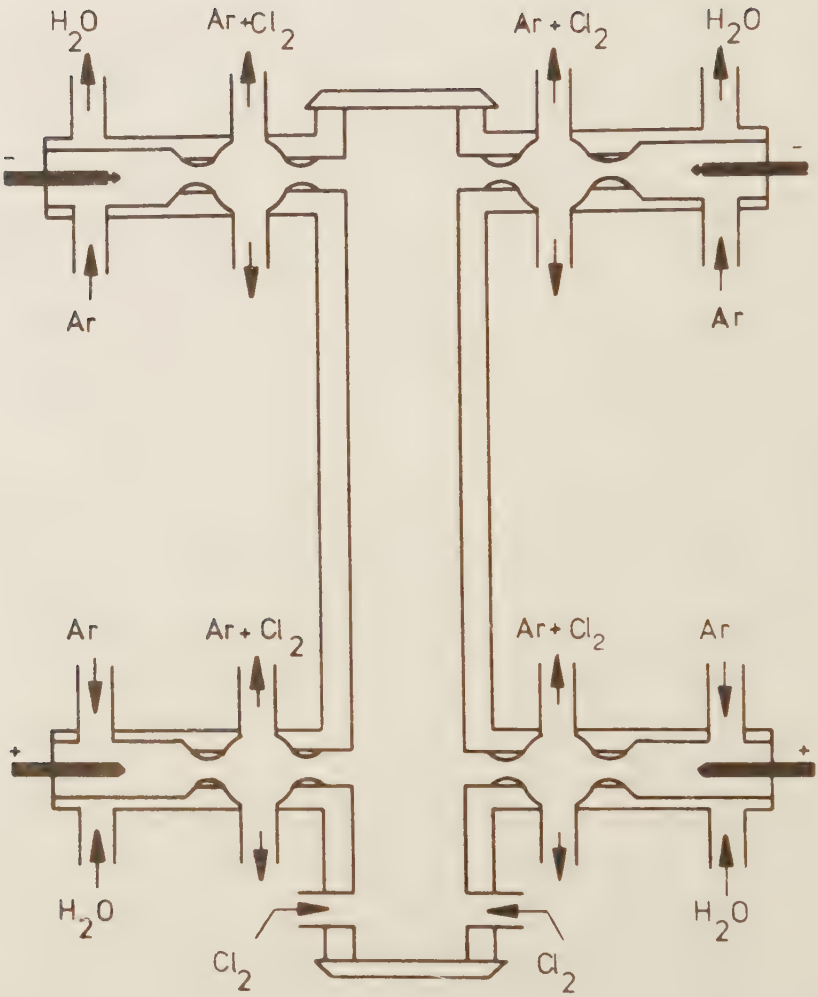


Abb. 2.1: Bogengefäß für Chlor- bzw. Sauerstoffbögen
(hier für den Fall des Chlorbogens dargestellt)

Seitlich an das Rohr sind jeweils zwei Kathoden- und zwei Anodenbögen angesetzt. In ihnen werden die Chlor- bzw. Sauerstoffbögen durch Argonbögen abgelöst. Dies wird erreicht, indem an den Elektroden zum Schutz vor dem korrosiven Gas Argon eingelassen wird, das dem Testgas entgegenströmt. Die Verengungen in den Seitenarmen beiderseits der Gasauslässe erhöhen die Strömungsgeschwindigkeiten, wodurch die Mischzone begrenzt und Gegendiffusionsströme vermindert werden. An den Gasauslässen bildet sich dann eine scharfe Trennschicht zwischen den beiden Gasen aus.

Die Elektroden bestehen aus thoriertem Wolfram. Die beiden Kathoden haben hinter der Spitze eine Verengung, um die Temperatur der Spitze zu erhöhen und damit den Bogenfußpunkt an die Spitze zu binden.

Das ganze Bogengefäß ist wassergekühlt. Aus Gründen der thermischen, mechanischen und chemischen Widerstandsfähigkeit ist es aus Quarz hergestellt.

Durch diesen Aufbau wird erreicht, daß der gesamte zylindrische Bogenteil für die "end on" Untersuchung zur Verfügung steht und die Sicht in die Wandzonen nicht behindert wird.

Abb. 2.2 zeigt das aus Quarz gefertigte Bogengefäß mit 18 mm Innendurchmesser und einer Gesamtlänge von 25 cm. Die im Experiment verwendeten Gefäße waren zwischen 15 und 25 cm lang. Der Innendurchmesser der Rohre betrug 12 und 18 mm.

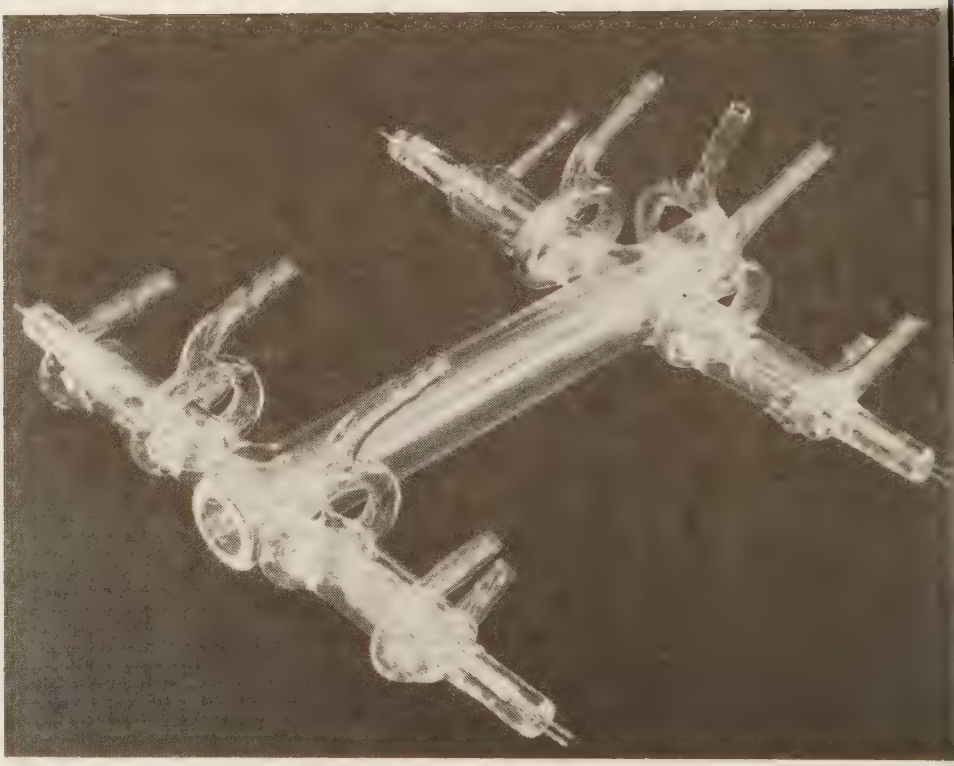


Abb. 2.2: Das Bogengefäß aus Quarz

2.2 Betrieb der Bogenentladung

Die Stromaufteilung auf die vier Teilbögen wird mit Hilfe von Vorwiderständen in den einzelnen Elektrodenzuleitungen erzwungen. Die Zündung des Bogens erfolgt durch einen Hochspannungsdurchschlag im Minimum der Paschenkurve, wozu eine Argonatmosphäre von ca. 1 mbar eingestellt wird.

Danach wird zunächst der Argondruck auf Atmosphärendruck erhöht und dann mit dem Einströmen des Testgases begonnen. Die Argon- und Testgasdurchflüsse werden durch Durchflußmengenmesser angezeigt und mit Nadelventilen reguliert.

Die sehr geringen Durchflüsse des Testgases von ca. 5 bis 10 cm^3/min werden mit einem Vordruck- und einem Durchflußregler eingestellt.

An den Gasauslässen des Bogengefäßes wird das Gasgemisch mit einer Wasserstrahlpumpe durch ein Flüssigkeitsfilter, bestehend aus einer Lösung mit Natriumthiosulfat und Natronlauge, gepumpt. Zwischen Bogengefäß und Filter wird am Druckausgleichsgefäß Nebenluft angesaugt, um damit den Gasdruck im Bogengefäß auf Atmosphärendruck zu halten.

2.3 Kürzung des Bogengefäßes

Für die optischen Messungen muß aus dem zylindrischen Teil des Bogengefäßes ein Teilstück der Länge Δl herausgeschnitten werden, ohne daß die Endräume verändert werden. Beim Zusammensetzen des gekürzten Rohres wird die Flucht der beiden Teile mit einem Laser über die Planparallelität der Endfenster kontrolliert.

3. Die optische Meßmethode

In einer zylindersymmetrischen Bogenentladung ist die Temperatur und damit der Brechungsindex parallel zur Bogenachse konstant. An den Enden des Lichtbogens kommt allerdings zu der Abhängigkeit der Temperatur vom Radius die Abhängigkeit in Achsenrichtung hinzu. Da die Gebiete niedriger Temperatur erheblich zur gesamten optischen Weglänge beitragen, muß der Einfluß der Endräume bei der Bestimmung des Brechungsindexes berücksichtigt werden.

Durch die Differenz der optischen Weglängen, die an zwei unterschiedlich langen Bogengefäßen mit identischen Endräumen gemessen werden, kann der Beitrag der Endräume eliminiert werden. Hieraus wird der Brechungsindex im zylindersymmetrischen Teil der Bogenentladung bestimmt.

Im folgenden wird das holographische Real-Time-Verfahren beschrieben, mit dessen Hilfe

1. die Differenz der optischen Weglängen zwischen zwei verschieden langen Bögen optisch ermittelt wird und

2. eine Wellenfront erzeugt wird, die die Phasendifferenz zweier Lichtwellen enthält, die verschieden lange Bogengefäße durchstrahlt haben.

3.1 Die holographische Interferometrie

Das Bogengefäß wird hier mit einem Parallellichtbündel durchstrahlt, dessen ebene Wellenfront durch die Brechungsindexvariation im Bogengefäß deformiert wird. Im holographischen Aufnahmeprozess wird die räumliche Phasenfunktion $\phi(x,y)$ dieser "Objektwelle" $O=O_o(x,y)\exp -j\phi(x,y)$ durch kohärente Addition der ebenen "Referenzwelle"

$R=R_o(x,y)\exp -j\frac{2\pi}{\lambda}(x\cos\beta + y\cos\alpha)$ in Form eines Schwärzungsgitters mit modulierter Gitterfrequenz auf einer Photoplatte gespeichert. (zur Geometrie siehe Abb. 3.1).

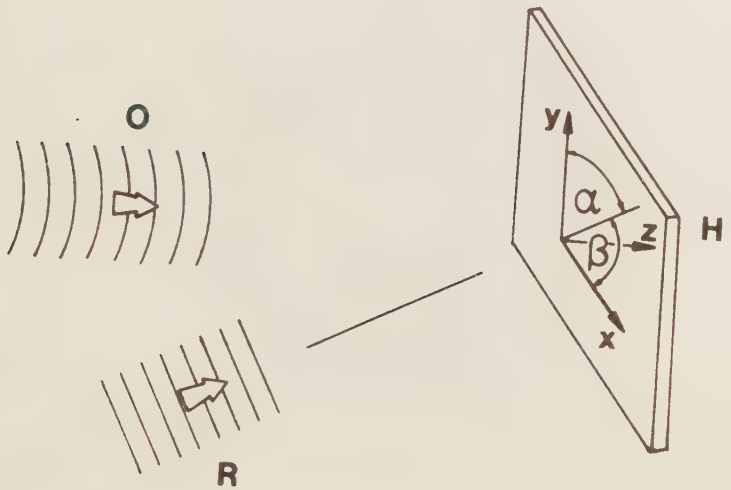


Abb. 3.1: Geometrie des holographischen Aufnahmeprozesses

Die Transmissionskurve $t(x,y)$ dieses Gitters ergibt sich durch Einsetzen der Intensitätsfunktion $I(x,y)=|O+R|^2$ in die Transmissionskennlinie des Photomaterials, die in der Nähe des Arbeitspunktes t_b linear ist.

$$t(x,y) = t_b + b\cdot I(x,y)$$
$$= t_b + b(|O|^2 + |R|^2 + O^{+}R + OR^{+}) \qquad (3.1)$$

Wird die entwickelte und repositionierte Photoplatte mit der Referenzwelle beleuchtet, so werden durch Beugung am Hologrammgitter drei Wellen erzeugt, die unter verschiedenen Winkeln aus dem Hologramm heraustreten:

$$\begin{aligned} R\cdot t(x,y) &= R(t_b + b(|O|^2 + |R|^2)) \\ &+ b\cdot R^2 O^+ \\ &+ b|R|^2 O \end{aligned} \tag{3.2}$$

Der dritte Summand beschreibt die rekonstruierte Objektwelle.[+)] Gleichzeitig wird nun die nur in der Phasenfunktion geänderte Objektwelle eines Bogens anderer Länge $O'=O'_O(x,y)\exp -j\phi'(x,y)$ überlagert (mit $O'_O=O_O bR_O^2$). Wir erhalten dann in der Abbildung ein Interferenzbild, das mit folgender Intensitätsfunktion I_B beschrieben werden kann:

$$\begin{aligned} I_B(x,y) &= |bR_O^2\ O\ |^2 + |O'|^2 + b\ R_O^2(OO'^+ + O^+O') \\ &= b^2R_O^4\ |O|^2 + |O'|^2) \\ &+ 2b^2R_O^4O_O^2\cos(\phi(x,y)-\phi'(x,y)) \end{aligned} \tag{3.3}$$

Die optische Weglänge $\Delta S(x,y)$ für die Differenzlänge Δl der beiden Bögen ergibt sich dann aus dem Interferenzterm zu

$$\Delta S(x,y) = \frac{\lambda}{2\pi}(\phi(x,y) - \phi'(x,y)) \tag{3.4}$$

wobei λ die Wellenlänge des verwendeten Fremdlichtes ist. Brechungsindex und optische Weglänge sind durch die Beziehung

$$\Delta S(x,y) = (n(x',y') - 1)\Delta l \tag{3.5}$$

miteinanderverknüpft, wobei die gestrichenen Koordinaten in der Objektebene liegen und die ortsunabhängige Phase außerhalb des Bogengefäßes abgezogen wurde.

[+)] Im Gegensatz zu der hier beschriebenen Rekonstruktion von "Amplitudenhologrammen" wurden im Experiment "Phasenhologramme" erzeugt, mit denen ein höherer Beugungswirkungsgrad erreicht wird. Die Beschreibung der Rekonstruktion solcher Phasenhologramme ist etwas aufwendiger, führt aber letztlich zu den selben Ergebnissen /8/.

Als Beispiel ist in Abb. 3.2 ein Chlorbogen-Interferogramm für eine Längenänderung von 7,9 cm wiedergegeben.

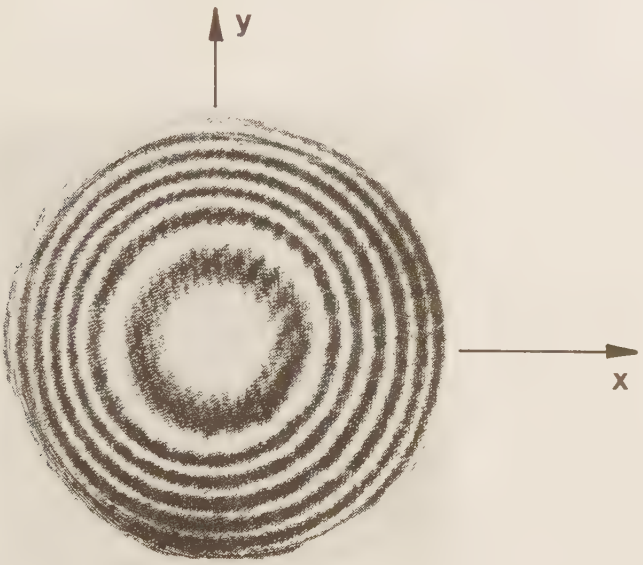


Abb. 3.2: Chlorbogen-Interferogramm für eine Differenzlänge von 7,9 cm.

Die Auswertung eines solchen Interferogrammes nach Gl. 3.4 erfolgt entlang der y-Achse. Aufgrund der nichtlinearen Wiedergabe photographischer Aufnahmen wird nur der Ort der Intensitätsmaxima und -minima bestimmt, d. h.

$$\phi(0,y) - \phi'(0,y) = n\pi \qquad (n = 0,1,2...) \qquad (3.6)$$

Die geringe Zahl von Meßpunkten hierbei kann erhöht werden, indem die beiden interferierenden Wellen unter einem kleinen Winkel zueinander auf die Bildebene treffen. Für den Fall zweier ebener Wellen ergäbe sich dann ein System paralleler, äquidistanter Interferenzstreifen. Im Falle der Interferenz von deformierten Wellenfronten wird die Streifenfrequenz im Interferogramm moduliert.

Die Verkippung der beiden Wellenfronten zueinander kann erreicht werden, wenn die Objektwelle O mit einer ebenen Referenzwelle R' rekonstruiert wird, die unter einer kleinen Winkeländerung $\Delta\alpha$ gegenüber der Hologrammaufnahme auf die Photoplatte trifft. Die Winkeländerung sei in y-Richtung, die neue Referenzwelle R' kann dann dargestellt werden durch

$$R' = R_o(x,y)\exp -j\frac{2\pi}{\lambda}(y\cdot\cos(\alpha+\Delta\alpha) + x\cdot\cos\beta) \qquad (3.7)$$

Wird mit dieser Welle die Objektwelle rekonstruiert, so wird in Gl. 3.2 der dritte Term folgendermaßen geschrieben

$$b\cdot R^{+}R'O = b\cdot R_o{}^2\exp -j\frac{2\pi}{\lambda}y(\cos(\alpha+\Delta\alpha) - \cos\alpha)\cdot O \qquad (3.8)$$

Die Intensitätsfunktion I_B im Interferogramm ergibt sich dann

$$I_B(x,y) = 2b^2R_o{}^4O_o{}^2 + 2b^2R_o{}^4O_o{}^2\cos(\frac{2\pi}{\lambda}y(\cos(\alpha+\Delta\alpha)-\cos\alpha) + \phi(x,y)-\phi'(x,y)) \qquad (3.9)$$

Die erhöhte Auflösung ist hier natürlich nur für die y-Koordinate gegeben. Das Argument des cos-Terms kürzen wir mit $\phi(x,y)$ ab und stellen die Bedingung für Intensitätsmaxima und -minima entlang der y-Achse auf

$$\begin{aligned}\phi(O,y) &= \frac{2\pi}{\lambda}y(\cos(\alpha+\Delta\alpha)-\cos\alpha) + \phi(O,y)-\phi'(O,y) \qquad (3.10)\\ &= n\pi \qquad (n = O,1,2\ldots)\\ &= \phi_o(y) + \phi(O,y) - \phi'(O,y)\end{aligned}$$

Der erste Term ϕ_o allein beschreibt die Orte der Grundstreifen ohne Phasenobjekt. Durch die im zweiten Term hinzukommende optische Weglänge des Phasenobjekts wird die Modulation der Grundstreifenfrequenz erzeugt.

Das gleiche Phasenobjekt wie in Abb. 3.2 liefert mit verkipptem Referenzstrahl das Interferogramm in Abb. 3.3.

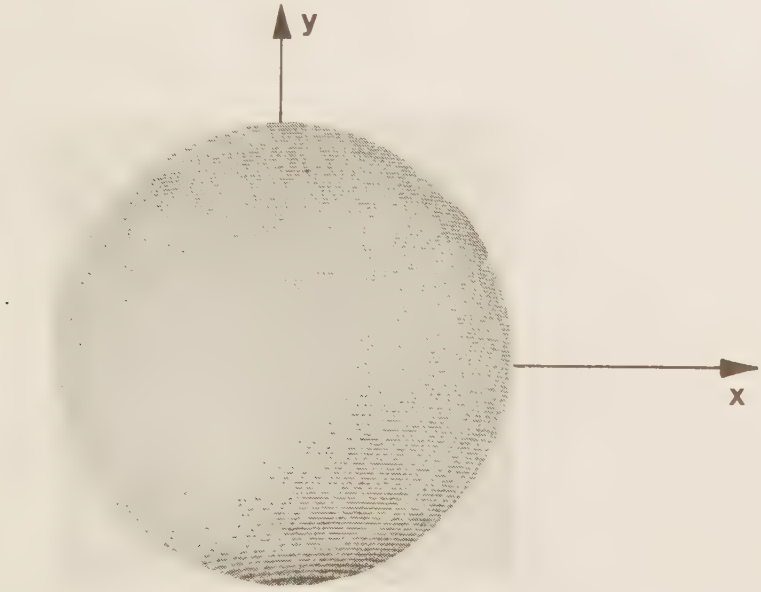


Abb. 3.3: Chlorbogeninterferogramm mit Grundstreifen für eine Differenzlänge $\Delta l = 7{,}9$ cm

Aus Gl. 3.4 und Gl. 3.10 ergibt sich die optische Weglänge ΔS als Differenz der optischen Weglängen Φ mit Phasenobjekt und der optischen Weglänge Φ_o ohne Phasenobjekt

$$\Delta S(x,y) = \frac{\lambda}{2\pi}(\Phi(x,y) - \Phi_o(x,y)) \qquad (3.11)$$

In Abb. 3.4 ist die aus dem Interferogramm ermittelte Funktion $\Phi(y)$ und die Funktion $\Phi_o(y)$ aus dem Interferogramm ohne Phasenobjekt gegen die Querkoordinate aufgetragen ($x = 0$).

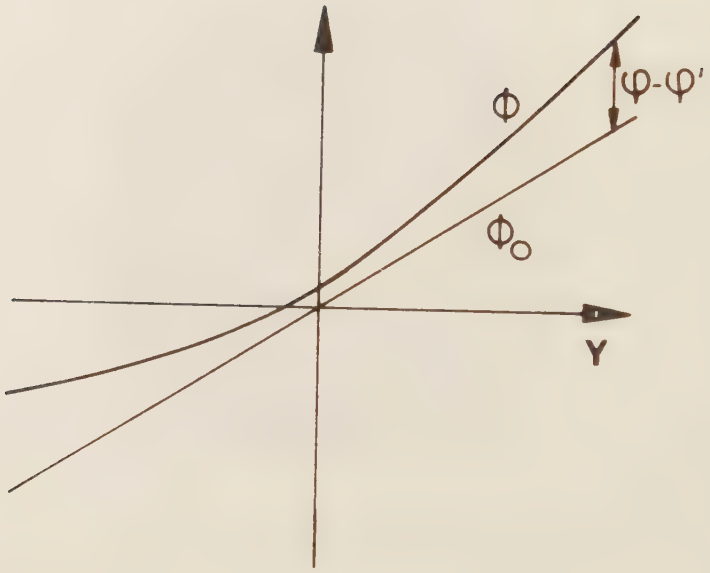


Abb. 3.4: Ermittlung der optischen Weglänge im Phasenobjekt aus den Grundstreifeninterferogrammen

3.2 Differentialinterferometrie

Neben der eben beschriebenen Methode, zwei Lichtwellen miteinander interferieren zu lassen, die überhaupt nicht zur gleichen Zeit existieren, wird das holographische Verfahren dazu benutzt, eine Lichtwelle zu erzeugen, deren Wellenfront der Phasendifferenz von O und O' ent-

spricht. Dazu wird das Hologramm wie in Gl. 3.2 beleuchtet, diesmal allerdings mit der Objektwelle O'

$$O' \cdot t(x,y) = O'(t_b + b(|O|^2 + |R|^2)) + b \cdot RO'O^+ + b \cdot R^+O'O \qquad (3.12)$$

Betrachten wir den zweiten Term genauer

$$b \cdot RO'O^+ = b \cdot RO_o^2(x,y)\exp -j(\phi'(x,y) - \phi(x,y)) \qquad (3.13)$$

so erkennen wir, daß es sich hierbei um eine Welle handelt, deren Phasenfunktion derjenigen entspricht, die ein Lichtbogen der Länge Δl aus einer ebenen Wellenfront erzeugen würde. Die Welle wird in Richtung der ursprünglichen Referenzwelle R gebeugt.

3.2.1 Das Prinzip der Differentialinterferometrie

Zur Ermittlung des Brechungsindexgradienten wird diese Welle in einem Differentialinterferometer untersucht, dessen optische Anordnung einem gewöhnlichen Schlierenaufbau entspricht. Die Schlierenkante ist hier jedoch durch ein Wollastonprisma ersetzt.

Das Wollastonprisma /9/ ist als eine planparallele Platte aufgebaut, die aus zwei Keilen, bestehend aus doppelbrechenden, optisch einachsigen Kristallen zusammengesetzt ist. Die Kristallachsen sind, wie in Abb. 3.5 gezeigt wird, senkrecht zueinander und senkrecht zur optischen Achse angeordnet.

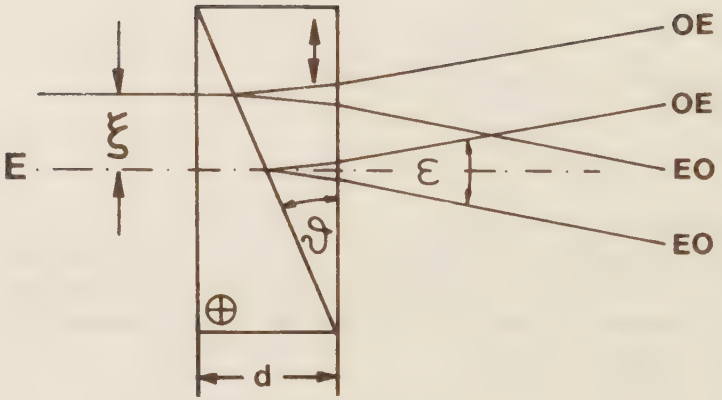


Abb. 3.5: Wollastonprisma mit Strahlaufspaltung

Seine Wirkung besteht zum einen in der Aufspaltung eines Lichtstrahls in zwei zueinander senkrecht polarisierte Lichtstrahlen, die einen kleinen Winkel ε einschließen.

$$\varepsilon = 2(n_E - n_O)\,\theta \qquad (3.14)$$

(n_O Brechungsindex des ordentlichen, n_E Brechungsindex des außerordentlichen Strahls)

Die Strahlen haben die gleiche Intensität, wenn die Polarisationsebene des einfallenden Lichtes um 45° gegen die Zeichenebene geneigt ist. Zum anderen erzeugt das Wollastonprisma einen optischen Wegunterscheid Δ zwischen den aufgespaltenen, zueinander senkrecht polarisierten

Strahlen. Dieser Wegunterschied hängt vom Abstand ξ des Lichtstrahls von der Mittelebene E durch das Prisma ab, bei der die Keile die gleiche Dicke haben.

$$\sigma_{OE,EO} = (n_O + n_E)\frac{d}{2} \pm \frac{\varepsilon}{2}\xi \qquad (3.15)$$

Betrachten wir zunächst eine Anordnung, bei der das Wollastonprisma im Brennpunkt eines Objektivs O aufgestellt wird (Abb. 3.6).

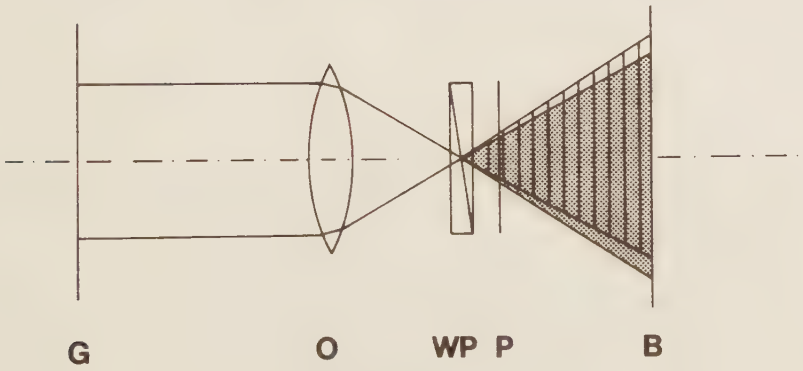


Abb. 3.6: Der prinzipielle Aufbau eines Differentialinterferometers

In diesem Fall wird lediglich eine Aufspaltung der Lichtwelle bewirkt, wodurch in der Bildebene eine Überlagerung der zueinander versetzten Bilder zustande kommt.

Ein Polarisationsfilter zwischen Wollastonprisma und Bildebene, das unter 45^{o} zu den Polarisationsrichtungen der aufgespaltenen Strahlen orientiert ist, bewirkt ihre Interferenzfähigkeit. Im Bild interferieren dann Strahlen miteinander, die das Phasenobjekt in der Gegenstandsebene in einem festen Abstand a durchstrahlt haben.

Betrachten wir unsere Lichtwelle in Gl. 3.13 und schreiben dafür abkürzend

$$O_s = b.RO'O^+ = O_{so}\exp -j\Delta\phi(x,y) \tag{3.16}$$

so können die beiden in der Bildebene interferierenden Lichtwellen wie folgt angegeben werden:

$$\begin{aligned} O_{s+} &= \frac{O_{so}}{2}\exp -j\Delta\phi(x,y+\frac{a}{2}) \\ O_{s-} &= \frac{O_{so}}{2}\exp -j\Delta\phi(x,y-\frac{a}{2}) \end{aligned} \tag{3.17}$$

Die Intensitätsfunktion $I(x_B,y_B)$ in der Bildebene infolge der Interferenz der versetzten Lichtwellen kann beschrieben werden durch

$$\begin{aligned} I(x_B,y_B) &= |O_{s+} + O_{s-}|^2 \\ &= |O_{s+}|^2 + |O_{s-}|^2 + O_{s+}O_{s-}^{+} + O_{s+}^{+}O_{s-} \\ &= O_{so}^2/2\ (1 + \cos(a\frac{d\Delta\phi}{dy})) \end{aligned} \tag{3.18}$$

Berücksichtigen wir die Beziehung $S = \frac{\lambda}{2\pi}\phi$, so beschreiben die Interferenzstreifen den Verlauf des Gradienten des optischen Weges in y-Richtung

$$\frac{dS}{dy} = \frac{\lambda}{2\pi}a\frac{d\Delta\phi}{dy}$$

Auch hier ist wie bei der Interferometrie nur die Auswertung von Intensitätsminima und -maxima möglich. Um einen geschlossenen Kurvenverlauf für den Gradienten des optischen Weges zu erhalten, ist die Zahl der Interferenzstreifen hier zu gering.

Verschieben wir das Wollastonprisma aus der Brennebene, so wird seine zweite Eigenschaft, Phasenverschiebungen zwischen den aufgespaltenen Lichtstrahlen einzubringen, wirksam.

Schon bei einer ebenen Wellenfront entstehen im Bild eine Anzahl von äquidistanten Interferenzstreifen, die Grundstreifen. In Abb. 3.7 erkennen wir, daß die Streifen als Interferenzbild zweier Punktlichtquellen, den aufgespaltenen Brennpunkten, zu verstehen sind.

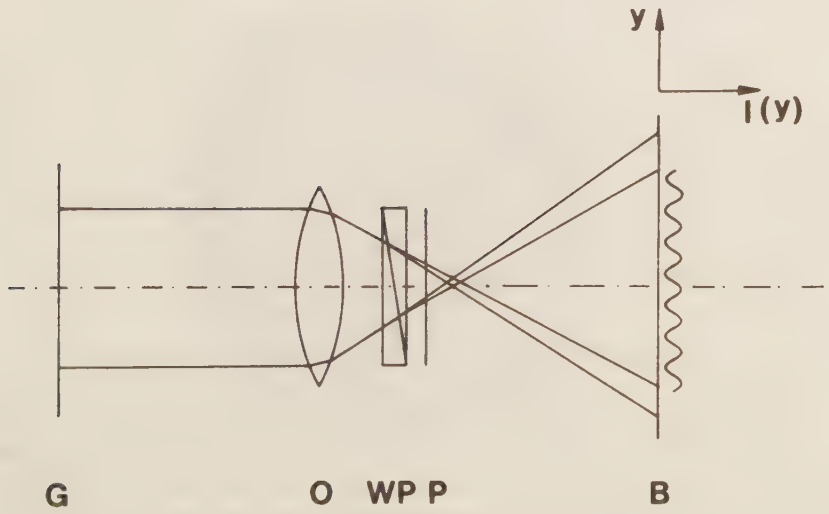


Abb. 3.7: Differentialinterferometer mit Wollastonprisma außerhalb der Brennpunktebene

Durch Einbringen eines Phasenobjektes wird die relative optische Weglänge zweier um a versetzter Strahlen im Objekt geändert. Diese Phasenverschiebung bewirkt somit eine Verschiebung der Interferenzstreifen im Bild.

Eine beugungstheoretische Ableitung der Beziehung zwischen der Streifenverschiebung und dem Brechungsindexgradienten wird im Anhang A angegeben. Das Ergebnis stellt eine Beziehung zwischen der Ableitung des optischen Weges senkrecht zur Strahlrichtung und der Differenz der Orte von verschobenen und unverschobenen Interferenzstreifen her.

$$\left.\frac{dS}{dy}\right|_{y_d} = (y_d - y_u)\,\frac{\varepsilon \cdot w}{a \cdot f} = \frac{y_d - y_u}{\Delta y_u}\,\frac{\lambda}{a} \tag{3.19}$$

$$a = \varepsilon \cdot f\,\frac{b - f - w}{b - f}$$

$$\Delta y_u = \frac{\lambda \cdot f}{\varepsilon \cdot w}$$

Hierbei haben die Bezeichnungen folgende Bedeutungen:

y_u Ort der Grundstreifen
y_d Ort der verschobenen Streifen
Δy_u Grundstreifenabstand
a Strahlversetzung
ε Aufspaltungswinkel des Wollastonprisma
w Abstand zwischen Wollaston-Prisma und Brennpunkt
f Brennweite des Objektivs
b Bildweite

3.2.2 Erzeugung von Differentialinterferogrammen

In Abb. 3.8 sind zwei Differentialinterferogramme zu sehen, die von holographisch erzeugten Wellenfronten aufgenommen wurden. Abb. 3.8a zeigt das Grundstreifenmuster, das mit einer ebenen Wellenfront erzeugt wurde, Abb. 3.8b zeigt die durch Dichtegradienten verschobenen Interferenzstreifen.

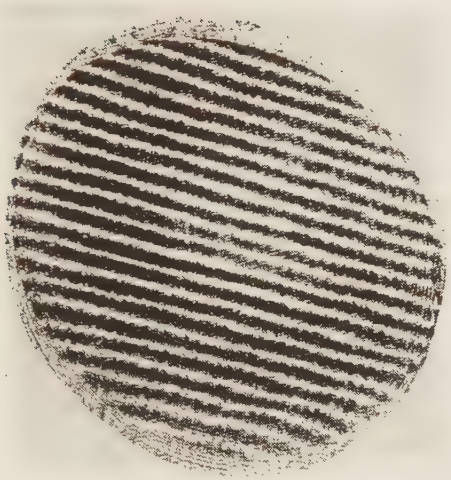


Abb. 3.8a

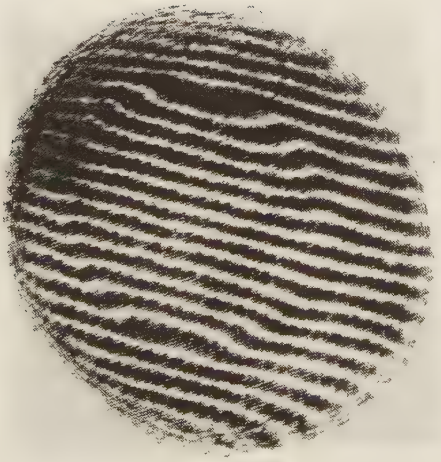


Abb. 3.8b

Abb. 3.8: Differentialinterferogramme
a) Interferenzstreifen ohne Störung
b) durch die Dichtegradienten in einem Chlorlichtbogen (Δl=7,9 cm) verschobenen Interferenzstreifen

Die Verformung der Wellenfront, die zur Erzeugung dieses Interferogramms diente, entspricht dabei der Verformung der Wellenfront, die ein Chlor-Lichtbogen der Länge $\Delta l=7,9$ cm hervorrufen würde.

Die ellipsenförmige Verzerrung des kreisrunden Bogenquerschnittes ist hierbei durch die spezielle Geometrie der holographischen Aufnahme und Wiedergabe bedingt. Die Objektwelle beleuchtet das Hologramm senkrecht, während die Referenzwelle schräg einfällt.

In Abb. 3.9 ist dies dargestellt. Abb. 3.9a zeigt die Photoplatte mit dem Strahlquerschnitt entgegen der Richtung der Objektwelle. Entgegen der Richtung der Referenzwelle Abb. 3.9b erscheint der kreisförmige Querschnitt zur Ellipse verzerrt. Das rechtwinklige Koordinatensystem in Abb. 3.9a geht hierbei in ein schiefwinkliges über.

3.3 Der optische Aufbau

Wie aus der Beschreibung der optischen Meßtechnik bereits hervorgeht, kann der optische Aufbau in zwei Teile unterteilt werden, den holographischen Aufbau und die Abbildungsoptik zur Erzeugung und Registrierung der Interferogramme und Differentialinterferogramme. Der gesamte Aufbau ist in Abb. 3.10a dargestellt.

3.3.1 Der holographische Aufbau

Die Polarisationsrichtung eines 15 mW HeNe-Laserstrahls wird zunächst durch eine $\lambda/2$-Platte so gedreht, daß die Polarisationsrichtung vor dem Wollastonprisma um 45° gegen die Richtung der Kristallachsen geneigt ist. Hierdurch wird der Kontrast der Interferenzstreifen maximal.

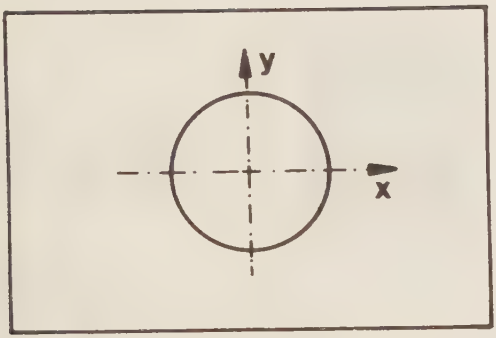


Abb. 3.9a

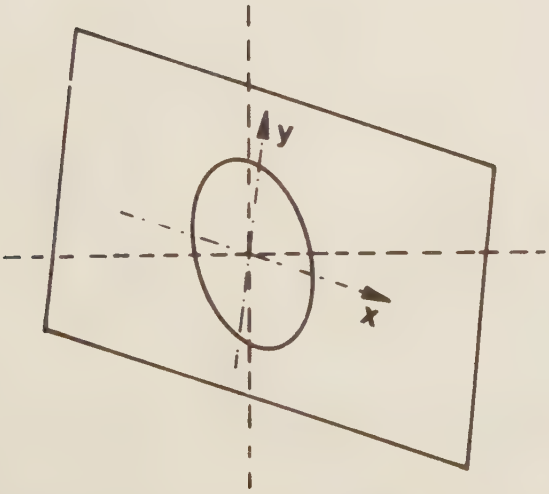


Abb. 3.9b

Abb. 3.9: Lichtstrahlgeometrie
a) Strahlquerschnitt auf der Photoplatte entgegen der Richtung der Objektwelle
b) Strahlquerschnitt entgegen der Richtung der Referenzwelle. --- rechtwinklige Koordinaten in der Bildebene

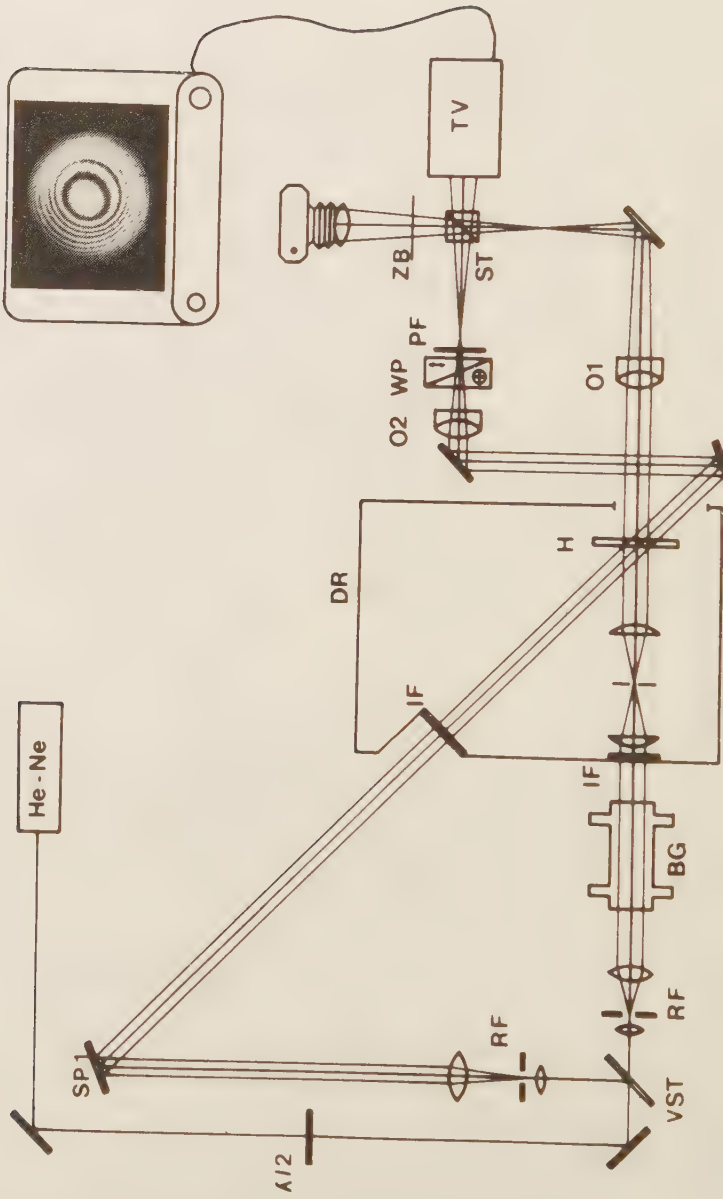


Abb. 3.10a: Optischer Aufbau
VST variabler Strahlteiler, RF Raumfilter, SP Planspiegel, BG Bogengefäß, IF Interferenzfilter, DR Dunkelraum, H Hologramm, O Objektiv, WP Wollastonprisma, PF Polarisationsfilter, ST Strahlteiler, ZB Zwischenbild, TV Fernsehkamera

Durch den variablen Strahlteiler VST wird er dann in zwei kohärente Teilstrahlen aufgespalten. Jeder dieser Strahlen wird durch eine telezentrische Aufweitungsoptik mit Raumfilter aufgeweitet. Der "Objektstrahl" durchstrahlt das entgegen der Zeichnung vertikal angeordnete Bogengefäß entlang seiner Achse. Das Endfenster des Bogengefäßes wird hier als Objektebene betrachtet und mit Hilfe eines telezentrischen Abbildungssystems auf die Hologrammplatte abgebildet.

Diese Abbildung auf die Photoplatte ist aus zwei Gründen notwendig:

1. Mit dem Spiegel SP1 kann die ebene Referenzwelle verkippt und somit der rekonstruierten Objektwelle eine schräge Wellenfront überlagert werden. In der Bildebene gibt es nur dann keine Versetzung der beiden interferierenden Objektwellen, wenn die Verkippung in einer Bild- oder Objektebene geschieht. Das bedeutet, daß die Hologrammplatte gleichzeitig mit dem Objekt auf die Kameraebene abgebildet werden muß.

2. Für die differentialinterferometrischen Messungen wird das Hologramm mit einer sich von der Aufnahmewelle unterscheidenden Objektwelle rekonstruiert. Durch die Abbildung wird verhindert, daß zu dem Phasenunterschied der rekonstruierten Welle in der Bogenfensterebene zusätzliche Phasenunterschiede aufgrund der räumlichen Ausbreitung der Welle hinzukommen. Dabei wird von der Tatsache Gebrauch gemacht, daß eine Abbildung die Phasenverteilung reproduziert.

Zudem kann im Brennpunkt des Abbildungssystems eine Blende eingesetzt werden, durch die das ungerichtete Bogenlicht abgeblendet wird.

Die Hologrammplatte ist in einem lichtdichten Gehäuse untergebracht, um Aufnahmen auch bei erhelltem Raum, wie es bei brennendem Bogen der Fall ist, machen zu können. Durch zwei Interferenzfilter, die auf die Wellenlänge des Lasers abgestimmt sind und eine Durchlaßbreite von $\Delta\lambda$=1 nm haben, wird das Umlicht weitgehendst zurückgehalten.

Die Hologrammplatten werden von einem Rahmen gehalten, aus dem sie nach der Belichtung zum Entwickeln herausgenommen und anschließend genau repositioniert werden können. Die gesamte holographische Anordnung ist auf einer schweren Steinplatte aufgebaut, die weitgehend schwingungsfrei gelagert ist. Abb. 3.10b zeigt den gesamten optischen Aufbau.

3.3.2 Die optische Registrierung

Die Registrierung der Interferogramme erfolgt in der Fortsetzung der Objektwelle. Mit einem Objektiv O1 wird die Hologrammebene und somit das Austrittsfenster des Lichtbogengefäßes zum einen auf das Vidicon einer Fernsehkamera und zum anderen gleichzeitig in eine Zwischenbildebene ZB abgebildet. Diese wiederum wird mit einer Spiegelreflexkamera mit großem Balgenauszug auf die Filmebene vergrößert abgebildet. Für die Aufspaltung wird ein Strahlteilerwürfel ST benutzt.

In der Fortsetzung der Referenzwelle findet die differentialinterferometrische Untersuchung statt. Wiederum wird die Hologrammebene auf das Vidicon und auf die Filmebene mit dem Objektiv O2(f=300 mm) abgebildet, wobei der Strahlteiler ST diese Welle in den interferometrischen Strahlengang einkoppelt. Zwischen dem Objektiv und dessen bildseitiger Brennebene ist ein Wollastonprisma WP(ε=5,4') so angeordnet, daß es eine Aufspaltung der Lichtwelle in Meßrichtung bewirkt.

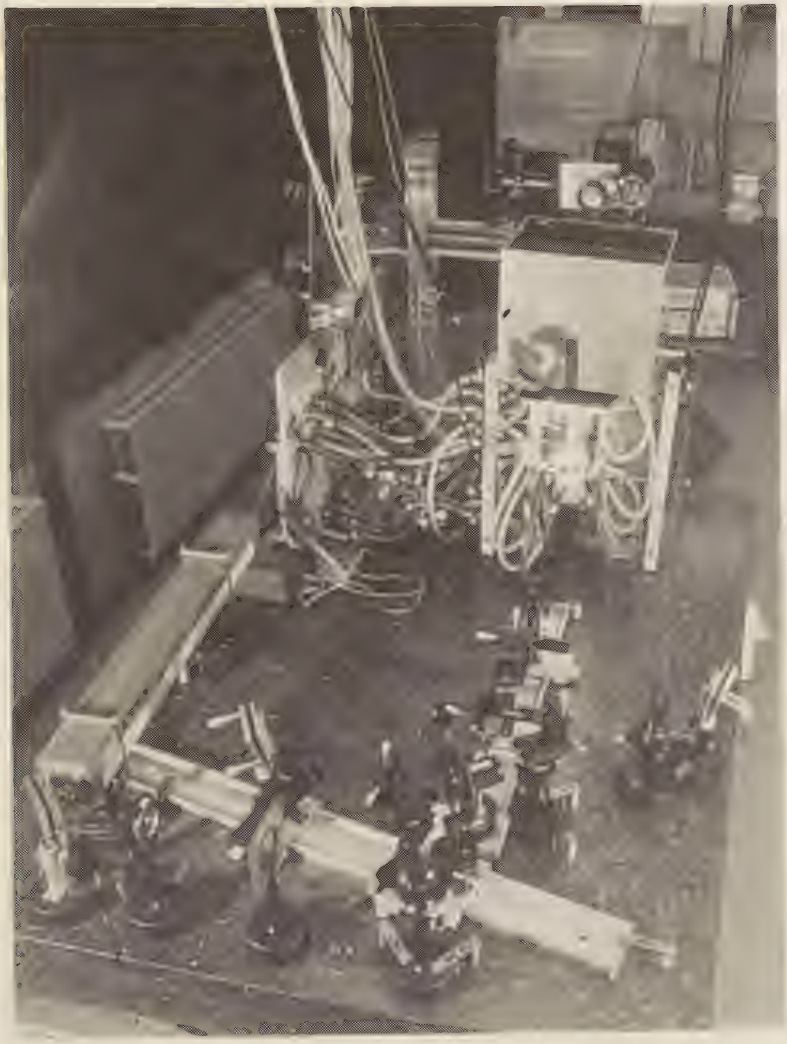


Abb. 3.10b: Der optische Aufbau,
im Vordergrund die Steinplatte mit dem gesamten holographischen Aufbau incl. dem Bogenaufbau,
im Hintergrund der Aufbau für die optische Registrierung

Wünschenswert wäre ein Wollastonprisma mit noch größerem ε gewesen, da dann bei gleichem a ein noch kleinerer Grundstreifenabstand hätte eingestellt werden können.

Hinter dem Wollastonprisma bewirkt ein Polarisationsfilter PF unter 45° zu den kristalloptischen Achsen die Interferenzfähigkeit der beiden aufgespaltenen Lichtbündel.

Die Strahlversetzung a, die das Wollastonprisma bewirkt, wurde experimentell aus der Versetzung des Bildes eines in die Objektebene eingebrachten Fadens ermittelt.

Insgesamt hatte die differentialinterferometrische Anordnung folgende Daten

ε=5,4'; f=300 mm; a=0,95 mm; Δy_u=0,68 mm ; λ=633 nm

3.4 Fehler aufgrund der Lichtbrechung

Bei der Interpretation der Interferogramme wurde bisher lediglich die Phasenverteilung des Laserlichtes am Austritt des Bogengefäßes berücksichtigt. Wenn jedoch der Brechungsindexgradient oder die Länge des Testvolumens groß ist, so werden die Lichtstrahlen merklich in Richtung der Gradienten abgelenkt. In Abb. 3.11 ist ein parallel zur z-Achse, die gleichzeitig die Bogenachse ist, einfallender Lichtstrahl und dessen Ablenkung dargestellt.

Der Brechungsindex ist entlang eines solchen Lichtweges nicht mehr konstant und somit ist seine Bestimmung aus dem gemessenen optischen Weg nach Gl. 3.4 allein nicht möglich. Der geometrische Weg des Lichtstrahls und der Verlauf des Brechungsindexes entlang dieses Weges müssen bei der Auswertung mit herangezogen werden.

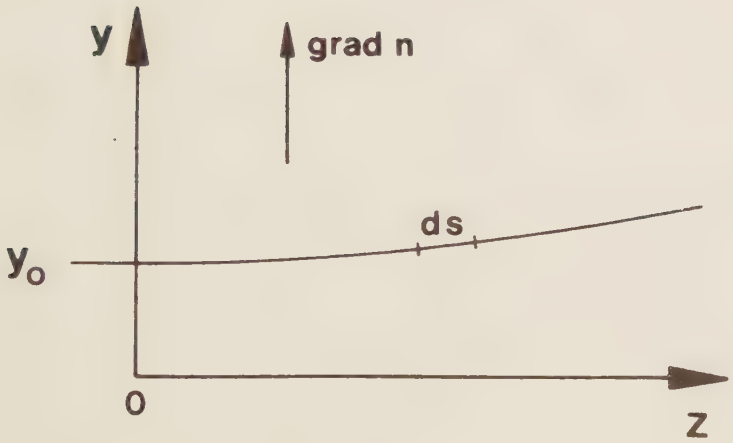


Abb. 3.11: Ablenkung eines Lichtstrahles im Brechungsindexgradientenfeld

Im folgenden Abschnitt werden die Fehler der Brechungsindexmessung infolge der Lichtstrahlablenkung abgeschätzt und danach unter Berücksichtigung dieser Ergebnisse die Wahl der Abbildungsebene im Phasenobjekt diskutiert.

3.4.1 Ablenkung der Lichtstrahlen durch Brechungsindexgradienten

Wir gehen dabei von folgenden Voraussetzungen aus (Abb. 3.11)

- die Brechungsindexfunktion ist zylindersymmetrisch,

- der Brechungsindexgradient ist senkrecht zum einfallenden Lichtstrahl gerichtet,
- der einfallende Lichtstrahl ist parallel zur z-Achse.

Der Verlauf von Lichtstrahlen im Brechungsindexfeld wird unter diesen Voraussetzungen durch die folgende aus der Eikonalgleichung abgeleitete Differentialgleichung beschrieben /10/

$$\frac{d}{ds}\left(n(y) \frac{dy}{ds} \right) = \frac{dn}{dy} \tag{3.20}$$

Ausgehend von dieser Gleichung folgen wir der Ableitung von Vest /11/. Zunächst ist ein Kurvenstück ds durch

$$ds = \left(1 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} dz \tag{3.21}$$

gegeben. Setzen wir dies ein und berücksichtigen

$$\frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{ds} \quad \text{sowie} \quad \frac{dn}{dz} = \frac{dn}{dy}\cdot\frac{dy}{dz} \tag{3.22}$$

so erhalten wir die Differentialgleichung

$$\frac{y''dy}{1 + (y')^2} = \frac{dn}{n} \tag{3.23}$$

wobei $y'' = \frac{d^2y}{dz^2}$ und $y' = \frac{dy}{dz}$ ersetzt.

Zur Integration der Differentialgleichung benutzen wir $y' = p$, $y'' = p'$ und die Randbedingungen

$$y(0) = y_o, \quad y'(0) = 0, \quad n(y_o, z=0) = n_o$$

und erhalten:

$$1 + (y')^2 = \left(\frac{n}{n_o}\right)^2 \tag{3.24}$$

Zur Lösung dieser Gleichung müssen wir den Brechungsindexverlauf kennen. Für die hier auftretenden Gradienten gehen wir von einem linearen Ansatz für n aus, da höhere Ableitungen nur unwesentliche Beiträge liefern. Dies wird am Ende der Fehlerbetrachtung gerechtfertigt.

$$n\,(y) = n_o + n'(y - y_o) \tag{3.25}$$

Setzen wir dies in Gl. 3.24 ein und vernachlässigen ebenfalls quadratische Glieder in $(y-y_o)$, so erhalten wir folgende Differentialgleichung

$$(y')^2 = 2\left(\frac{n'}{n_o}\right)(y - y_o) \tag{3.26}$$

Die Integration dieser Gleichung liefert die Beziehung zwischen dem Brechungsindexgradienten und der Strahlversetzung $y-y_o$ am Orte z der Meßzelle

$$y - y_o = \frac{1}{2}\left(\frac{n'}{n_o}\right) z^2 \tag{3.27}$$

Die optische Weglänge

$$S\,(y) = \int_0^l n\,(y)\,ds \tag{3.28}$$

kann mit den Gleichungen 3.21 und 3.25 - 3.27 angegeben und ausgerechnet werden

$$S\,(y) = \int_0^l n_o\left(1 + \left(\frac{n'}{n_o}\right)^2 z^2\right) dz$$

$$= n_o l \left(1 + \frac{1}{3}\left(\frac{n'}{n_o}\right)^2 l^2\right) \tag{3.29}$$

Da wir hier die Differenz der optischen Weglängen zweier unterschiedlich langer Testobjekte messen, können wir für den gemessenen optischen Weg auf der Strecke $\Delta l = l_1 - l_2$ schreiben

$$\Delta S_{12} = n_o\,(l_1 - l_2) + \frac{1}{3}\frac{n'^2}{n_o}\,(l_1^3 - l_2^3) \tag{3.30}$$

Der zweite Summand drückt die Abweichung der optischen Weglänge aufgrund der Strahlablenkung aus. $\lambda/10$ ist etwa die Genauigkeit, mit der die optische Weglänge bestimmt werden kann. Somit ist die Bedingung

$$\frac{1}{3}\frac{n'^2}{n_o}\left(l_1^3 - l_2^3\right) \leq \frac{\lambda}{10} \tag{3.31}$$

ein Kriterium, inwieweit Strahlablenkungen hier überhaupt meßbar sind. Der absolut gemessene optische Wegunterschied ist jedoch mehrere Wellenlängen groß, so daß die Fehlergrenze bei Anwendung dieses Kriteriums im Prozentbereich liegt.

In Tabelle 3.1 sind die maximalen Gradienten, die dieses Kriterium erfüllen bei verschiedenen Bogenlängen angegeben. Δl wurde dabei jeweils gleich gewählt

Δl/m	l_1/m	l_2/m	n'_{max}/m^{-1}	y_1-y_o/mm	y_2-y_o/mm
0.04	0.2	0.16	$7\cdot10^{-3}$	0.14	0.09
0.04	0.16	0.12	$9\cdot10^{-3}$	0.12	0.06
0.04	0.12	0.08	$1.3\cdot10^{-2}$	0.09	0.04

Tabelle: 3.1

In den letzten beiden Spalten sind die nach Gl. 3.27 berechneten Strahlabweichungen für die entsprechenden Phasenobjektlängen und deren maximale Gradienten angegeben. Die Korrektur der optischen Weglängen und der Strahlabweichungen kann aufgrund der hier gemessenen Brechungsindexgradienten von $n' < 2.5\cdot10^{-2}\ m^{-1}$ vernachlässigt werden.

Aus Gl. 3.30 erhalten wir durch Differentiation nach y die Meßgröße der Differentialinterferometrie

$$\frac{d}{dy}\,\Delta s_{12} = n'_o\,(l_1 - l_2) + \frac{2}{3}\frac{n'\,n''}{n_o}\left(l_1^3 - l_2^3\right) \tag{3.32}$$

wobei der zweite Summand die Abweichung des Gradienten der optischen Weglänge aufgrund der Strahlablenkung beschreibt. Die relative Korrekturgröße erhalten wir aus dem Quotienten K beider Summanden

$$K = \frac{2}{3}\frac{n''}{n_o}\;\frac{l_1^3 - l_2^3}{l_1 - l_2} < 0{,}05 \qquad (3.33)$$

wobei wir $n'_o = n'$ benutzt haben.

Die Interpretation der Interferogramme kann daher hier ohne Berücksichtigung der Strahlablenkung erfolgen. Etwaige Korrekturen sind kleiner als die Meßgenauigkeit.

3.4.2 Wahl der Abbildungsebene

Bei starken Strahlablenkungen aufgrund von großen Brechungsindexgradienten ist die Wahl der Abbildungsebene im Objekt sorgfältig zu wählen. Bei der Durchstrahlung des Objektes mit flächenhaften, also räumlich inkohärenten Lichtquellen würde sich eine falsche Wahl der Abbildungsebene sofort durch Verschwinden des Interferenzstreifenkontrasts bemerkbar machen. Bei der Verwendung von Punktlichtquellen, also räumlich kohärentem Licht, ist die Wahl der Abbildungsebene weniger eindeutig bestimmt.

Die Abbildungsebene muß so gelegt werden, daß die tangentiale Verlängerung der austretenden Lichtstrahlen in das Testobjekt hinein die Objektebene bei z_o in y_o, der Koordinate des nichtabgelenkten Strahls schneidet (s. Abb. 3.12). Nur so interferieren abgelenkter und nichtabgelenkter Strahl in der Bildebene. Da die Strahlablenkung mit dem Brechungsindexgradienten variiert, ist eine eindeutige Festlegung der Abbildungsebene nicht möglich.

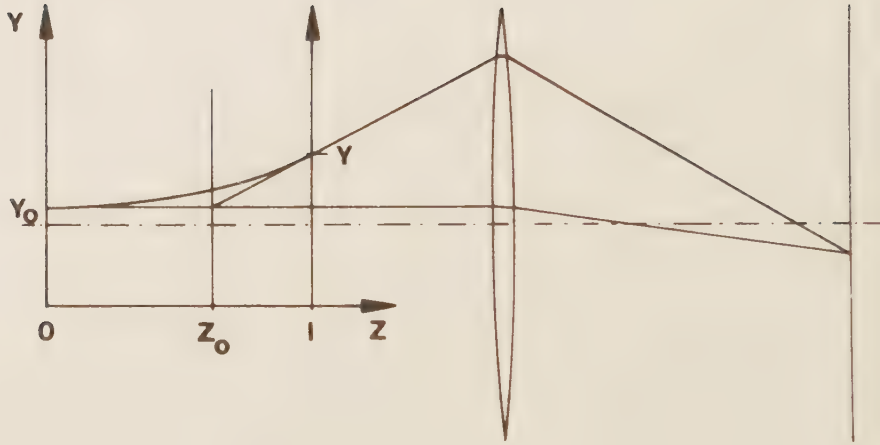


Abb. 3.12: Zur Strahlablenkung und Wahl der Abbildungsebene

Aufgrund der hier vernachlässigbaren Strahlablenkung $y-y_o$ (Gl. 3.27) ist die Wahl der Abbildungsebene unkritisch. Es erwies sich als günstig für die Kontrolle der Abbildung, das Austrittsfenster des Bogengefäßes als Objektebene zu definieren.

4. Messung und Auswertung der Wärmeleitfähigkeit

4.1 Ergebnisse der Messungen

In dem beschriebenen Bogengefäß wurden Bögen unterschiedlicher Leistung in Chlor und in Sauerstoff betrieben. Dabei wurden bei Chlor Gefäßdurchmesser von 12 mm und 18 mm benutzt. Sauerstoff-Messungen wurden nur in einem 12 mm Rohr durchgeführt. O_2-Bögen konnten im 18 mm Rohr aus folgenden Gründen nicht betrieben werden:

1. Bei höheren Stromstärken wird die Säule des reinen Sauerstoffbogens magnetisch instabil und verformt sich zu einer Helix.

2. Bei niedrigen Stromstärken steigt die Bogenspannung sehr stark an und mit ihr der negative differentielle Widerstand der Entladung. Zur Kompensation des negativen differentiellen Widerstandes und damit zur Stabilisierung des Stromkreises ist ein zusätzlicher ohmscher Widerstand erforderlich, so daß die Spannung des Netzgerätes (1,5 kV) für den Betrieb des Bogens nicht mehr ausreicht.

4.1.1 Ergebnisse für die Bogenleistung

Die Bogenleistung pro Längeneinheit wurde aus dem Bogenstrom und der Feldstärke im Bogen bestimmt. Letztere wurde wiederum aus den Brennspannungen an den Elektroden bei verschiedenen Bogenlängen ermittelt. In Abb. 4.1 sind die Bogenleistungen von Chlor und Sauerstoff über dem Bogenstrom aufgetragen, der auf den Gefäßradius normiert ist. In dieser Darstellung wird die Bogenleistung vom Gefäßradius R unabhängig. Dies folgt aus der Energiebilanz für den Fall, daß der Energietransport durch Strahlung vernachlässigt werden kann und die elektrische wie die Wärmeleitfähigkeit eine eindeutige Funktion der Gastemperatur sind.

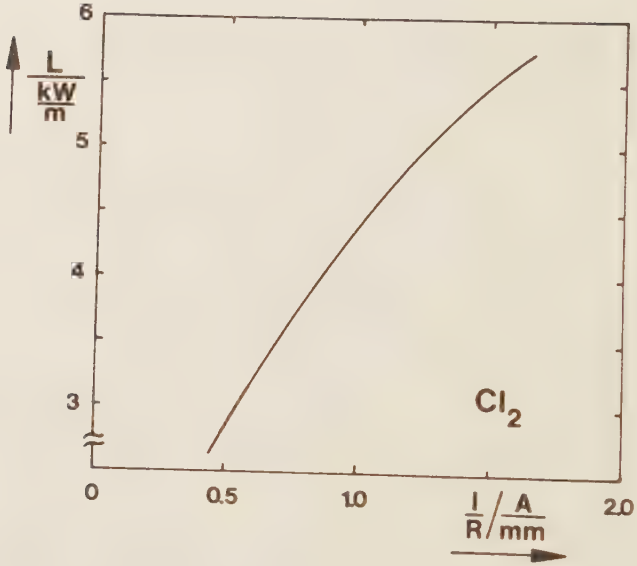


Abb. 4.1a

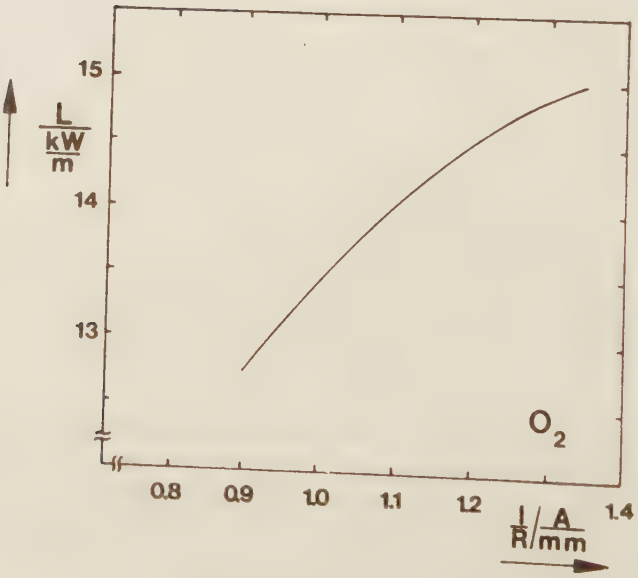


Abb. 4.1b

Abb. 4.1: Bogenleistung gegen den auf den Gefäßradius normierten Bogenstrom aufgetragen
a) Chlor b) Sauerstoff

4.1.2 Ergebnisse der optischen Messungen

Die Interferogramme, die aus der Differenz der optischen Weglängen in zwei unterschiedlich langen Bogengefäßen entstehen, wurden photographisch registriert. Der Ort der Interferenzstreifen im Bogengefäß wurde durch den bekannten Abbildungsmaßstab aus dem Photonegativ photometrisch ermittelt. Somit konnte nach Gl. 3.11 und Gl. 3.5 der Brechungsindexverlauf ausgewertet werden. In Abb. 4.2 ist er für Chlor und Sauerstoff gegen den normierten Radius aufgetragen.

Aus den Interferogrammen kann $(n-1)(r)$ nur bis auf eine Konstante n_o bestimmt werden. Diese Konstante wird bei der Bestimmung der Wärmeleitfähigkeit ermittelt und ist in der Darstellung in Abb. 4.2 bereits berücksichtigt.

Ebenso wurden die Differentialinterferogramme aufgenommen und ausgewertet. Nach Gl. 3.19 wurden dann die Brechungsindexgradienten bestimmt. In Abb. 4.3 sind sie gegen den normierten Radius für Chlor und Sauerstoff aufgetragen.

4.2 Die Leistungsbilanz in Lichtbögen

Zur Auswertung der radialen Brechungsindex- und Brechungsindexgradientenverläufe gehen wir von der Leistungsbilanz des Lichtbogens aus.

$$\vec{j} \cdot \vec{E} - \operatorname{div} \vec{q} - e + a = \rho \frac{dh}{dt} \qquad (4.1)$$

Der elektrischen Leistungsaufnahme pro Volumenelement $\vec{j}\cdot\vec{E}=\sigma\cdot E^2$ steht als Verlust der Netto-Wärmestrom $\operatorname{div} \vec{q}=\operatorname{div}(-\kappa \operatorname{grad} T)$ entgegen. e beschreibt die pro Volumenelement emittierte, a die pro Volumenelement absorbierte Strahlungsleistung.

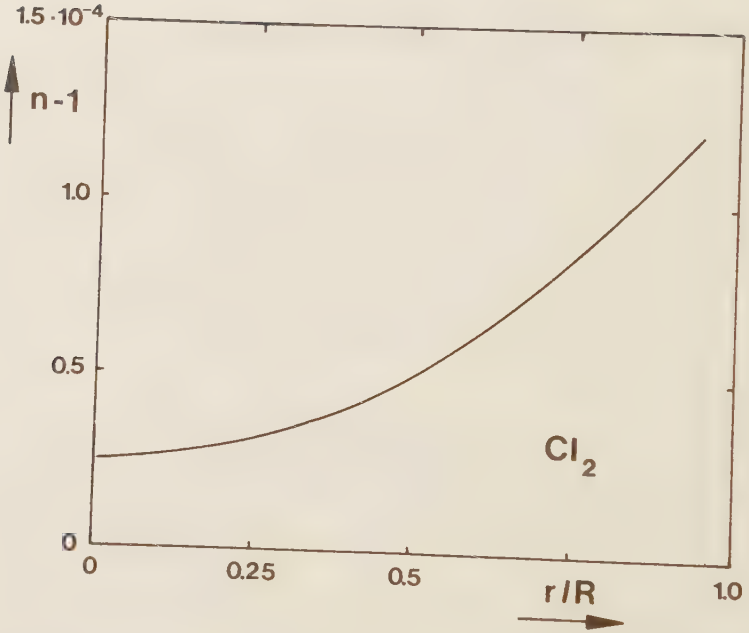


Abb. 4.2a

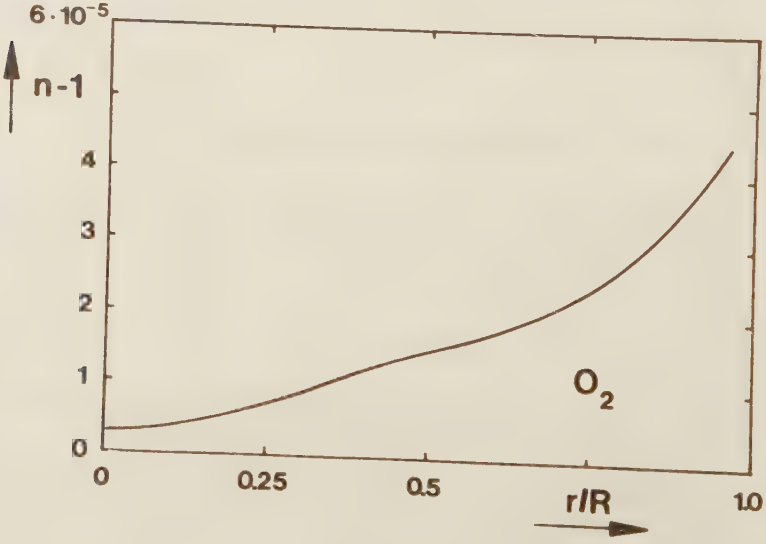


Abb. 4.2b

Abb. 4.2: Brechungsindex in Abhängigkeit vom normierten Radius
a) Chlor I=9A
b) Sauerstoff I=9A

Abb. 4.3: Brechungsindexgradienten in Abhängigkeit vom normierten Radius
a) Chlor 9A
b) Sauerstoff 8A

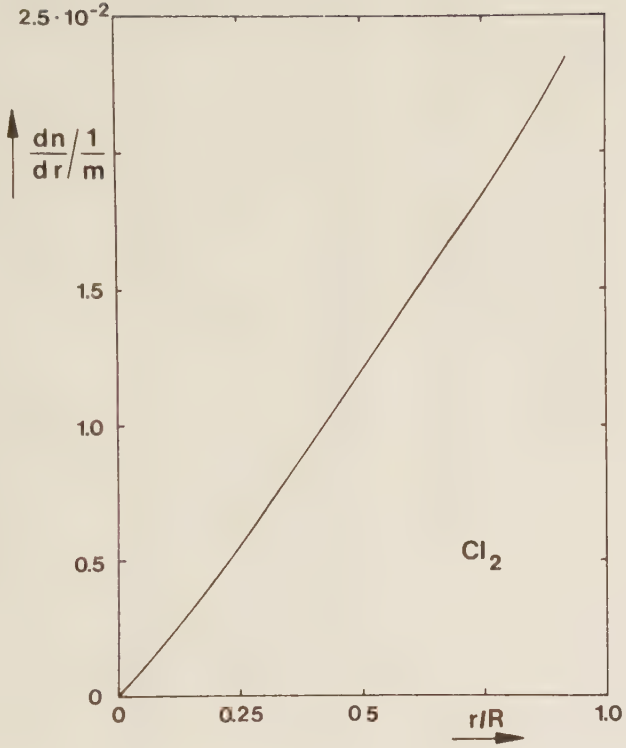


Abb. 4.3a

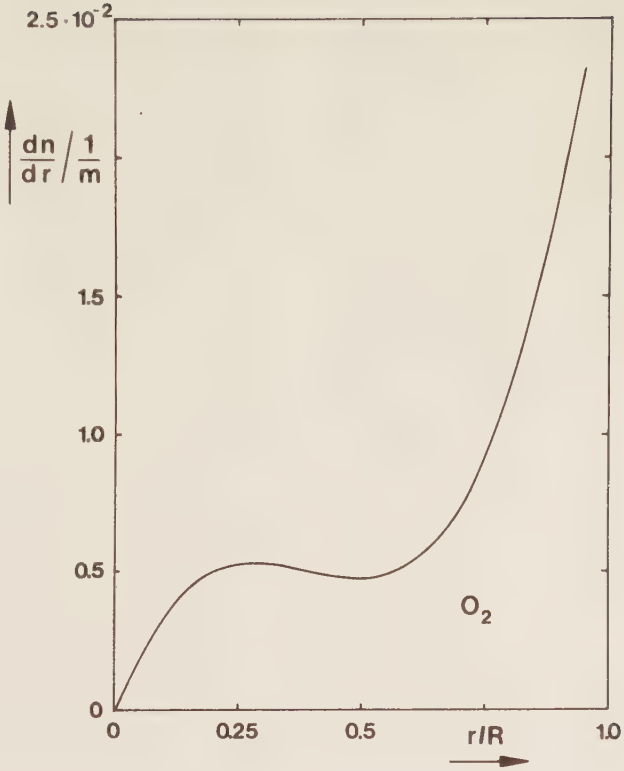


Abb. 4.3b

$$\rho \frac{dh}{dt} = \rho \frac{\partial h}{\partial t} + \rho \vec{v} \text{ grad } h$$

ist die zeitliche Änderung der Enthalpie in einem Volumen, das mit der Strömung mitschwimmt.

Für den untersuchten stationären Bogen ist die lokale zeitliche Änderung der Enthalpie $\rho \partial h/\partial t = 0$. Der Konvektionsterm $\rho \vec{v}$ grad h beschreibt den Energietransport durch die Auftriebsströmung im Bogen. Im zur Messung herangezogenen zylindrischen Teil der Bogensäule gilt jedoch $\vec{v} = v_z \cdot \vec{e}_z$ und grad $h = \frac{\partial h}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial r} \vec{e}_r$. Die Strömungsgeschwindigkeit und der Temperaturgradient sind senkrecht zueinander gerichtet, so daß auch der Konvektionsterm in der Energiebilanz zu Null wird ($\rho \vec{v}$ grad h=0).

Schließlich können wir für Temperaturen unter 10 000 K, die in unserem Bogen nicht überschritten werden, den Energietransport durch Strahlung vernachlässigen. Dies zeigt auch die Leistungs-Strom-Charakteristik des Chlorbogens L=f(I/R) in Abb. 4.1a, die vom Gefäßradius R unabhängig ist.

Mit diesen Vernachlässigungen erhalten wir für die Leistungsbilanz des stationären zylindrischen Bogens die folgende Differentialgleichung

$$\sigma E^2 + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \kappa \frac{dT}{dr} = 0 \qquad (4.2)$$

Die Wärmeleitfähigkeit κ ergibt sich durch Integration dieser Gleichung

$$\kappa = - \frac{2\pi E^2 \int_0^r \sigma(r')\, r'\, dr'}{2\pi\, r \left.\frac{dT}{dr}\right|_r} \qquad (4.3)$$

Der Zähler gibt die innerhalb eines Zylinders mit dem Radius r pro Längeneinheit umgesetzte elektrische Leistung an. Mit der integralen Bogenleistung L pro Längeneinheit wird die Wärmeleitfähigkeit außerhalb des leitenden Bogenkanals

$$\kappa = - \frac{L}{2\pi\ r \frac{dT}{dr}} \tag{4.4}$$

Hierbei läßt sich der Temperaturgradient durch den gemessenen Brechungsindexgradienten ausdrücken. Nach der Kettenregel gilt

$$\frac{dT}{dr} = \frac{dT}{dn}(T) \cdot \frac{dn}{dr}(r) \tag{4.5}$$

Die Funktion dT/dn (T) kann aus der Temperaturfunktion des Brechungsindexes, wie im Abschnitt 4.3 gezeigt wird, bestimmt werden. Bei richtiger Zuordnung der Temperaturfunktion zu den Radien läßt sich dann die Wärmeleitfähigkeit bestimmen.

4.3 Brechungsindex als Temperaturfunktion

Im Dissoziationsgebiet besteht das Gas im wesentlichen aus Atomen und Molekülen als Gaskomponenten. Die vollständige Gaszusammensetzung ist im Temperaturbereich von 600 - 10 000 K aus den Massenwirkungsgesetzen unter der Nebenbedingung, daß der Druck konstant ist, berechnet worden. Im Anhang B werden die Berechnungen und die Ergebnisse dargestellt. Danach kann der Anteil von Ionen und Elektronen in dem hier untersuchten Temperaturbereich vernachlässigt werden.

Somit läßt sich mit der Lorentz-Lorenz-Formel für Gase ($n \approx 1$) /12/ der Brechungsindex n-1 hier folgendermaßen angeben

$$n - 1 = 2\pi \cdot \alpha_A \cdot N_A(T) + 2\pi \cdot \alpha_M \cdot N_M(T) \tag{4.6}$$

wobei α_A und α_M die Polarisierbarkeiten der Atome bzw. Moleküle und N_A bzw. N_M ihre Teilchenzahldichten sind. Zunächst wollen wir die Funktion dT/dn aus Gl. 4.6 und dem Massenwirkungsgesetz für die Dissoziation ableiten. Dazu differenzieren wir zunächst den Brechungsindex in Gl. 4.6 nach der Temperatur

$$\frac{dn}{dT} = 2\pi\alpha_A \frac{dN_A}{dT} + 2\pi \alpha_M \frac{dN_M}{dT} \tag{4.7}$$

Die Differentiale der Teilchenzahldichten können mit Hilfe des Massenwirkungsgesetzes für die Dissoziation berechnet werden. Dieses lautet

$$\frac{p_A^2}{p_M} = K_p = kT \frac{Z_A^2}{Z_M} \left(\frac{m_A}{m_M}\right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{2\pi m_A kT}{h^2}\right)^{\frac{3}{2}} \exp - \frac{E_D}{kT} \tag{4.8}$$

Hierbei sind:

p_A, p_M	die Partialdrücke der Atome und Moleküle
K_p	die Gleichgewichtskonstante
k	die Boltzmannkonstante
Z_A, Z_M	die Zustandssummen
m_A, m_M	die Atom- bzw. Molekülmassen
h	das Plancksche Wirkungsquantum
E_D	die Dissoziationsenergie

Der Gesamtdruck p ist die Summe der Partialdrücke

$$p = p_A + p_M = \text{konst.} , \tag{4.9}$$

so daß gilt

$$\frac{dp_A}{dT} = - \frac{dp_M}{dT} \tag{4.10}$$

Durch Logarithmieren und Differenzieren von Gl. 4.8 erhalten wir aus der linken Seite

$$\frac{dp_A}{dT} = \frac{d \ln K_p}{dT} \frac{p_A \, p_M}{p_A + 2p_M} \tag{4.11}$$

$d\ln K_p/dT$ erhalten wir aus der rechten Seite von Gl. 4.8

$$\frac{d \ln K_p}{dT} = \frac{5}{2} \frac{1}{T} + 2 \frac{d \ln Z_A}{dT} - \frac{d \ln Z_M}{dT} + \frac{E_D}{kT^2} \tag{4.12}$$

Die logarithmische Ableitung der Zustandssummen ist proportional der mittleren Anregungsenergie des Gases

$$\frac{d \ln Z}{dT} = \frac{1}{kT^2} \cdot U_i \tag{4.13}$$

damit erhalten wir

$$\frac{d \ln K_p}{dT} = \frac{5/2 \cdot kT + 2U_{iA} - U_{iM} + E_D}{kT^2} = \frac{\Delta h}{kT^2} \tag{4.14}$$

wobei der Zähler gleich der Reaktionsenthalpie Δh ist.[+)] Berücksichtigen wir das allgemeine Gasgesetz $p=NkT$ so erhalten wir aus Gl. 4.11 mit Gl. 4.14

$$\frac{dp_A}{dT} = \frac{d(N_A kT)}{dT} = \frac{N_A \cdot N_M}{N_A + 2N_M} \frac{\Delta h}{T} \tag{4.15}$$

und nach der Ausrechnung des mittleren Terms und Auflösen nach dN_A/dt

$$\frac{dN_A}{dT} = \frac{N_A \cdot N_M}{N_A + 2N_M} \cdot \frac{\Delta h}{kT^2} - \frac{N_A}{T} \tag{4.16}$$

+) Die innere Energie der Atome, die ausschließlich die elektronische Anregung beschreibt, kann in der Regel gegenüber der inneren Energie der Moleküle vernachlässigt werden, da diese tiefliegende Rotations- und Vibrationsniveaus besitzen. Setzen wir $U_{iA}=0$ und nehmen an, daß der Gleichverteilungssatz gilt (d.h. alle Rotations- und Vibrationsniveaus sind voll angeregt), so können wir für $U_{iM}=2kT$ setzen (jeweils 1/2 kT für zwei Rotationsfreiheitsgrade und für die potentielle- und die Schwingungsenergie). Diese Annahme ist im Dissoziationsgebiet gerechtfertigt. Damit erhalten wir $\Delta h=1/2kT+E_D$ (s. dazu auch F. Reif /13/). Da E_D etwa zehnmal so groß wie kT ist, sind Abweichungen vom Gleichverteilungssatz für das Endergebnis ohne Bedeutung.

Aus der Beziehung

$$\frac{dp_M}{dT} = N_M k + kT \frac{dN_M}{dT} = - \frac{dp_A}{dT} \qquad (4.17)$$

erhalten wir entsprechend

$$\frac{dN_M}{dT} = - \frac{N_A N_M}{N_A+2N_M} \frac{\Delta h}{kT^2} - \frac{N_M}{T} \qquad (4.18)$$

und durch Einsetzen in Gl. 4.7 ergibt sich

$$\left(\frac{dT}{dn}\right)^{-1} = \frac{dn}{dT}$$

$$= \frac{N_A N_M}{N_A+2N_M} \frac{\Delta h}{kT^2} (2\pi(\alpha_A-\alpha_M)) - \frac{2\pi}{T}(\alpha_A N_A+\alpha_M N_M) \qquad (4.19)$$

Der Ausdruck hängt auch implizit über die Teilchenzahldichten stark von der Temperatur ab.

4.4 Probleme der Temperaturbestimmung

Grundsätzlich ist die Bestimmung des radialen Temperaturverlaufs nach Gl. 4.6 und damit die Auswertung der Wärmeleitfähigkeit nach Gl. 4.4 möglich. Dazu müssen aber drei Einschränkungen gemacht werden.

1. Bei den Temperaturen im Dissoziationsbereich sind die Rotations- und Vibrationszustände der Moleküle voll angeregt. Dadurch kann sich die mittlere Polarisierbarkeit der Moleküle (die bei Zimmertemperatur gemessen wurde) ändern.

2. Die Bestimmung des Brechungsindexverlaufes ist nur bis auf eine additive Konstante n_o möglich, da die absolute optische Weglänge im Bogengefäß nicht auf Bruchteile einer Wellenlänge genau bestimmt werden kann.

3. Die Polarisierbarkeit der Chloratome ist bislang experimentell nicht bestimmt worden. Die nach verschiedenen Methoden berechneten Werte für α_{Cl} reichen von $2{,}3 \cdot 10^{-24}$ cm^3 bei Atoji /14/ über $2{,}61 \cdot 10^{-24}$ cm^3 bei Thorhallsson et al. /15/ bis $3{,}46 \cdot 10^{-24}$ cm^3 bei Cooper, Martin /16/. Die Polarisierbarkeit des atomaren Sauerstoffs ist dagegen aus Stoßwellenexperimenten bekannt /17/.

4.4.1 Zur Abweichung der mittleren Molekülpolarisierbarkeiten bei höheren Temperaturen

Mit steigender Molekülmasse sinkt die Energie, die für Rotations- und Schwingungsanregung nötig ist. Die Rotationszustände der Moleküle sind bei Zimmertemperatur bereits voll besetzt. Darüber hinaus existiert bei Cl_2 auch bei Zimmertemperatur bereits eine deutliche Besetzung von Schwingungsniveaus, die mit steigender Temperatur zunimmt.

Das Dipolmoment von gleichatomigen Molekülen ändert sich allerdings durch Schwingungsanregung nicht. Erst bei höheren Anregungszuständen führen die geringen Asymmetrien der Vibrationspotentiale zu kleinen Änderungen der Polarisierbarkeit. Diese Änderungen können aufgrund der geringen Besetzung hoch angeregter Energieniveaus vernachlässigt werden.

Andererseits tragen zur Polarisierbarkeit die Resonanzübergänge mit dem Summand $f_i/(\omega_{oi}^2-\omega^2)$ bei. f_i ist die Oszillatorenstärke und ω_{oi} ist die Frequenz des elektronischen Überganges, ω ist die Frequenz des eingestrahlten Fremdlichtes. Die Resonanzübergänge liegen bei Cl_2 unterhalb einer Wellenlänge von 200 nm. Die Verschiebung der Übergangsfrequenz infolge von Rotations- und Vibrationsanregung fällt

daher wegen des großen Abstandes zur Wellenlänge des verwendeten Fremdlichtes von 633 nm nicht ins Gewicht.

Für die Polarisierbarkeit der Moleküle ist daher der Wert für Zimmertemperatur auch bei höheren Temperaturen voll gerechtfertigt.

4.4.2 Zur Absolutbestimmung des Brechungsindexes und Bestimmung der atomaren Polarisierbarkeit α_A

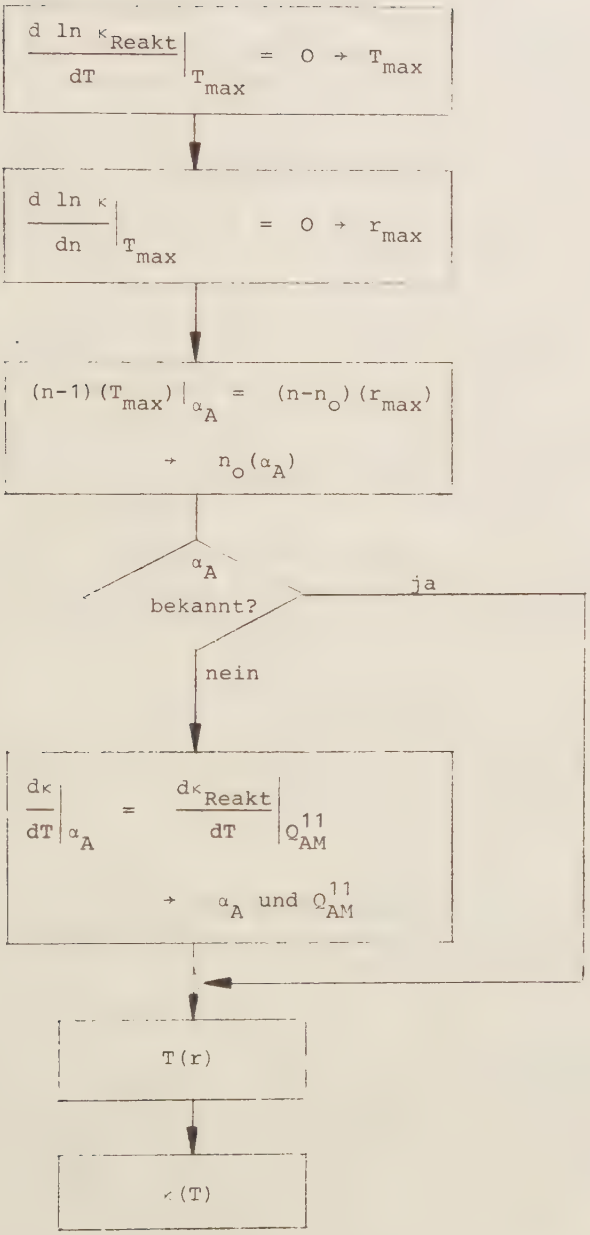
In diesem Abschnitt wird der Gang der Auswertung beschrieben, durch den die Absolutbestimmung des Brechungsindexes und die Bestimmung der atomaren Polarisierbarkeit erfolgt. In Tafel 4.1 ist eine Übersicht über den Ablauf der Auswertung dargestellt.

4.4.2.1 Bestimmung der Temperatur des Maximums der Wärmeleitfähigkeit

Die Unkenntnis der additiven Konstanten n_o bei Sauerstoff und Chlor sowie der atomaren Polarisierbarkeit von Chlor muß durch andere Informationen ersetzt werden. Die Kenntnis der Temperatur an einem Punkt im Bogengefäß ist eine mögliche Zusatzinformation. Die Festlegung der Temperatur in der Bogenachse, wo sie spektroskopisch gemessen wurde, oder an der Gefäßwand, wo sie über die Wärmeleitfähigkeit von Quarz berechnet werden könnte, scheidet aus folgenden Gründen aus:

1. Der Brechungsindex besitzt bei den höheren Temperaturen im Bogenplasma eine geringe Temperaturabhängigkeit. Zudem werden zusätzliche Gaskomponenten (Ionen, Elektronen) erzeugt, was ebenfalls die Temperaturfindung erschwert.

2. Die interferometrischen Meßdaten reichen nicht bis an die Bogengefäßwand heran. Da die Temperaturgradienten in der Nähe der Wand sehr groß sind, ist der Anschluß an die Wandtemperatur nicht möglich.



Tafel 4.1: Flußdiagramm zur Auswertung der Wärmeleitfähigkeit

Genauer gelingt die Festlegung der Temperatur durch das für dissoziierende Gase charakteristische Maximum der Wärmeleitfähigkeit. Im Dissoziationsgebiet kommt zu der normalen Kontaktwärmeleitfähigkeit aufgrund der Energieübertragung von "heißen" Teilchen an "kalte" die Reaktionswärmeleitfähigkeit. Infolge der Partialdruckgradienten im Temperaturfeld diffundieren laufend Moleküle in das Gebiet höherer Temperatur, wo sie dissoziiert werden. Die Atome diffundieren zurück und rekombinieren bei niedrigen Temperaturen, wodurch die Reaktionsenergie transportiert wurde. Während die Kontaktwärmeleitfähigkeit nur langsam mit steigender Temperatur zunimmt, und zwar $\propto\sqrt{T}$, ist die Reaktionswärmeleitfähigkeit durch ein ausgeprägtes Maximum charakterisiert. Der Betrag des Maximums liegt ungefähr um eine Größenordnung über dem Betrag der Kontaktwärmeleitfähigkeit.

Eine Formel für den Verlauf der Reaktionswärmeleitfähigkeit in Abhängigkeit von der Temperatur wird im Anhang C abgeleitet. Das Ergebnis ist die folgende Gleichung

$$\kappa_{Reakt} = \frac{N_A \cdot N_M}{(N_A+2N_M)^2} \cdot \frac{3}{8} \cdot \sqrt{\frac{3\pi}{4m_A kT}} \cdot \frac{(\Delta h)^2}{Q_{AM}^{11} \cdot T} \qquad (4.20)$$

in der neben den Teilchendichten N_A, N_M und der Reaktionsenthalpie $\Delta h = \frac{1}{2}kT + E_D$ pro Rekombination von zwei Atomen das Stoßintegral Q_{AM}^{11} steht.

Durch logarithmische Differentiation dieser Gleichung bei der Temperatur des Maximums der Wärmeleitfähigkeit T_{max} unter der Bedingung:

$$\frac{\frac{d}{dT}\,\kappa_{Reakt}(T_{max})}{\kappa_{Reakt}} = 0 \qquad (4.21)$$

erhalten wir eine Bestimmungsgleichung für die Temperatur T_{max}

$$\frac{(2N_M-N_A)(N_M+N_A)}{(2N_M+N_A)^2} = \frac{kT_{max}}{\Delta h}\left(\frac{3}{2} - \frac{2T_{max}}{\Delta h} \cdot \frac{d\Delta h}{dT}\right) \qquad (4.22)$$

Hierbei wurden die Gleichungen 4.16 und 4.18 benutzt. T_{max} kann also ohne Kenntnis der Stoßquerschnitte bestimmt werden, wenn wir die schwache Temperaturabhängigkeit des Stoßintegrals vernachlässigen (z. B. Sauerstoff /18/).

Im Falle von Sauerstoff erhalten wir das Maximum der Wärmeleitfähigkeit bei

$$T_{max} = 3780 \text{ K}$$

und für Chlor bei

$$T_{max} = 2080 \text{ K}$$

4.4.2.2 Bestimmung des Ortes r_{max} für das Maximum der Wärmeleitfähigkeit

Der Aufhängepunkt für die radiale Temperaturfunktion ist gefunden, wenn wir den Radius r_{max} angeben können, an dem das Maximum der Wärmeleitfähigkeit mit der Temperatur T_{max} liegt.

Dazu wollen wir mit Gl. 4.4 und Gl. 4.5 eine neue Funktion einführen

$$\kappa \frac{dT}{dn} = - \frac{L}{2\pi\, r \frac{dn}{dr}} \tag{4.23}$$

Für sie erhalten wir anstelle der Temperaturabhängigkeit aus den Meßgrößen L, dn(r)/dr, $n(r)-n_o$

$$\kappa \frac{dT}{dn} = - g\ (n-n_o)$$

Die Wärmeleitfähigkeit ergibt sich, wenn wir diese Funktion mit der reinen Temperaturfunktion dn/dT multiplizieren.

Diese hängt aber, wie aus Gl. 4.19 hervorgeht, von der atomaren Polarisierbarkeit α_A ab.

$$\kappa = - g(n-n_o) \cdot \frac{dn}{dT}(n)\Big|_{\alpha_A} \tag{4.24}$$

Bilden wir die logarithmische Ableitung von κ nach dem Brechungsindex im Maximum der Wärmeleitfähigkeit, so erhalten wir eine Bedingungsgleichung aus der r_{max} bestimmt werden kann.

$$\frac{d \ln \kappa}{dn}\Big|_{T_{max}} = \frac{d \ln g(n-n_o)}{dn}\Big|_{T_{max}} + \frac{d \ln \frac{dn}{dT}(n)}{dn}\Big|_{T_{max}} = 0 \tag{4.25}$$

Da der Brechungsindex eine monoton fallende Funktion der Temperatur ist, verschwindet diese Summe bei T_{max} wie $d\kappa/dT$.

Die Summanden können wir noch genauer angeben

1. $$\frac{d \ln g(n-n_o)}{dn} = \frac{d \ln \kappa \frac{dT}{dn}}{dn} = \frac{\frac{d}{dn}\left(\frac{L}{2\pi r}\frac{dr}{dn}\right)}{\frac{L}{2\pi r}\frac{dr}{dn}} \tag{4.26}$$

Mit der Kettenregel $\frac{df}{dn} = \frac{df}{dr}\cdot\frac{dr}{dn}$ erhalten wir schließlich

$$\frac{d \ln \kappa \frac{dT}{dn}}{dn} = - \left\{\frac{1}{r\frac{dn}{dr}} + \frac{d^2n/dr^2}{(dn/dr)^2}\right\} \tag{4.27}$$

Dies ist eine Funktion, die lediglich die radialen Meßgrößen enthält.

Dagegen kann der zweite Summand in Gl. 4.25 allein aus den von der Temperatur abhängigen Teilchendichten bestimmt werden

2. $$\frac{d \ln \frac{dn}{dT}}{dn} = \frac{\frac{d}{dn}\frac{dn}{dT}}{\frac{dn}{dT}} \tag{4.28}$$

Mit der Kettenregel $\frac{df}{dn}=\frac{df}{dT}\cdot\frac{dT}{dn}$ erhalten wir

$$\frac{d\ \ln\frac{dn}{dT}}{dn} = \frac{d^2n/dT^2}{(dn/dT)^2} \tag{4.29}$$

Dies ist eine reine Temperaturfunktion mit α_A als Parameter.

Aus der bereits bestimmten Funktion dn/dT (Gl. 4.19) ergibt sich durch nochmalige Differentiation unter Benutzung von Gl. 4.16 und Gl. 4.18

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\tau}\ \frac{d^2n}{dT^2} = {} & \frac{N_A\ N_M}{(N_A+2N_M)^3}\ (\frac{\Delta h}{kT^2})^2(\alpha_A-\alpha_M)(2N_M^2-N_A^2)\\ & - \frac{N_A\ N_M}{N_A+2N_M}\ \frac{3\Delta h+E_D}{kT^2}\ \frac{1}{T}(\alpha_A-\alpha_M)\\ & + \frac{2}{T2}\ (\alpha_A N_A+\alpha_M N_M)\end{aligned} \tag{4.30}$$

Damit erhalten wir an der Stelle T_{max} eine Bestimmungsgleichung für r_{max}

$$\left.\frac{\frac{d^2n}{dT^2}\Big|_{\alpha_A}}{(\frac{dn}{dT})^2\Big|_{\alpha_A}}\right|_{T_{max}} = \left.\{\frac{1}{r\ \frac{dn}{dr}} + \frac{\frac{d^2n}{dr^2}}{(\frac{dn}{dr})^2}\}\right|_{r=r_{max}} \tag{4.31}$$

wobei r_{max} noch von α_A abhängt.

Mit der bekannten Polarisierbarkeit des atomaren Sauerstoffs kann r_{max} jetzt bestimmt werden. In Abb. 4.4a ist die rechte Seite von Gl. 4.31, die aus der Messung des Brechungsindexgradienten und seiner numerischen Ableitung bestimmt wurde, gegen den normierten Radius aufgetragen. Diese Kurve nimmt an drei Punkten den Wert von $\frac{d}{dn}\ln\frac{dn}{dT}\Big|_{T_{max}}$ an, von denen der mittlere bei $r_{max}/R=0{,}53$ der ist, bei dem die Auswertung eine realistische Temperatur in der Achse und an der Wand ergibt sowie einen Wärmeleitfähigkeitsverlauf, der Gl. 4.20 entspricht.

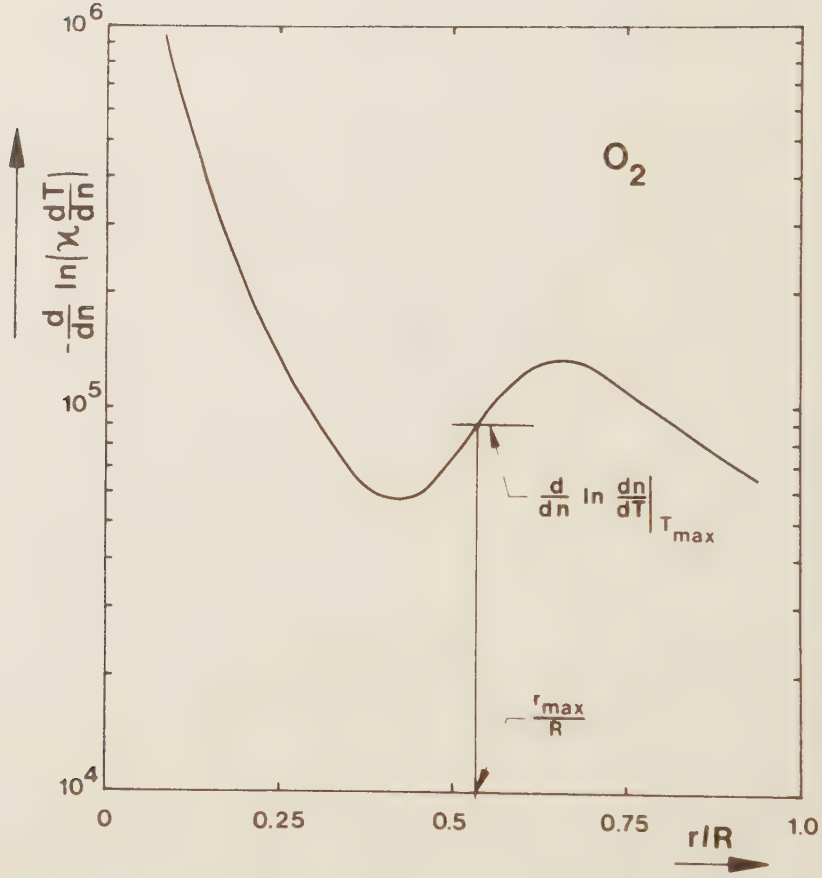


Abb. 4.4a: Zur Bestimmung von r_{max}
Sauerstoff I=8A

In Abb. 4.4b ist der nach Gl. 4.6 berechnete Brechungsindex als Funktion der Temperatur aufgetragen. Wie oben auch wurde $\alpha_O = 7{,}7 \cdot 10^{-25}$ cm^3 /17/ und $\alpha_{O_2} = 1{,}6 \cdot 10^{-24}$ cm^3 /19/ eingesetzt. Aus dem in der Kurve gekennzeichneten Wert für T_{max} erhalten wir die unbekannte Konstante n_o im gemessenen radialen Brechungsindexverlauf. n_o wurde in Abb. 4.2b bereits so gewählt, daß $(n-1)(T_{max}) = (n-1)(r_{max})$ erfüllt ist.

Für Chlor ist die rechte Seite von Gl. 4.31 in Abb. 4.5a gegen den normierten Radius aufgetragen. Im gleichen Ordinatenmaßstab ist die linke Seite von Gl. 4.31 gegen die atomare Polarisierbarkeit α_{Cl} aufgetragen, so daß r_{max} als Funktion von α_{Cl} bestimmt werden kann. Zwischen $\alpha_{Cl} = 20 \cdot 10^{-25}$ cm^3 und $\alpha_{Cl} = 30 \cdot 10^{-25}$ cm^3 ändert sich r_{max}/R nur wenig nämlich von 0,718 auf 0,687. Somit hängt die additive Konstante n_o im wesentlichen ab von der Änderung des Brechungsindexes bei T_{max} durch die verschiedenen Polarisierbarkeiten α_{Cl}.

In Abb. 4.5b ist der Brechungsindex als Funktion der Temperatur aus Gl. 4.6 für die drei verschiedenen atomaren Polarisierbarkeiten 20,25 und $30 \cdot 10^{-25}$ cm^3 dargestellt, wobei für die Polarisierbarkeit der Moleküle $\alpha_{Cl_2} = 46{,}1 \cdot 10^{-25}$ cm^3 /19/ benutzt wurde.

Aus dem Vergleich des gemessenen Brechungsindexes bei $r_{max}(\alpha_{Cl})$ und dem aus Abb. 4.5b entnommenen $n\text{-}1(\alpha_{Cl})|_{T_{max}}$ kann n_o als Funktion von α_{Cl} aufgetragen werden (Abb. 4.6)

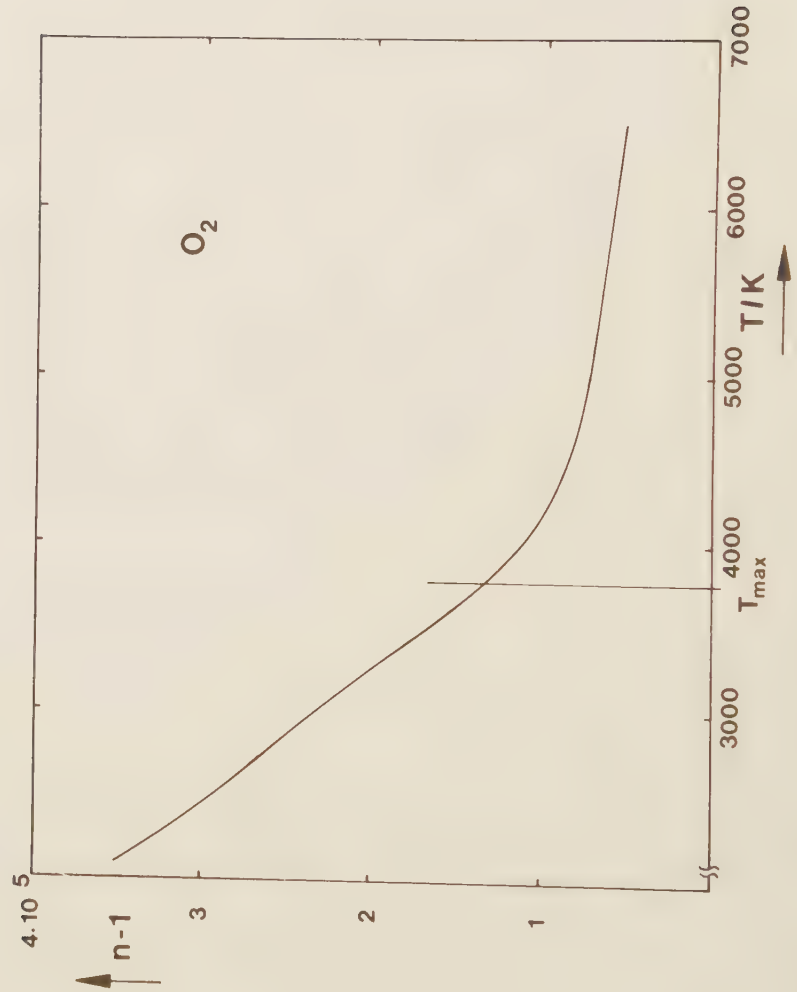


Abb. 4.4b: (n-1)(T) für Sauerstoff

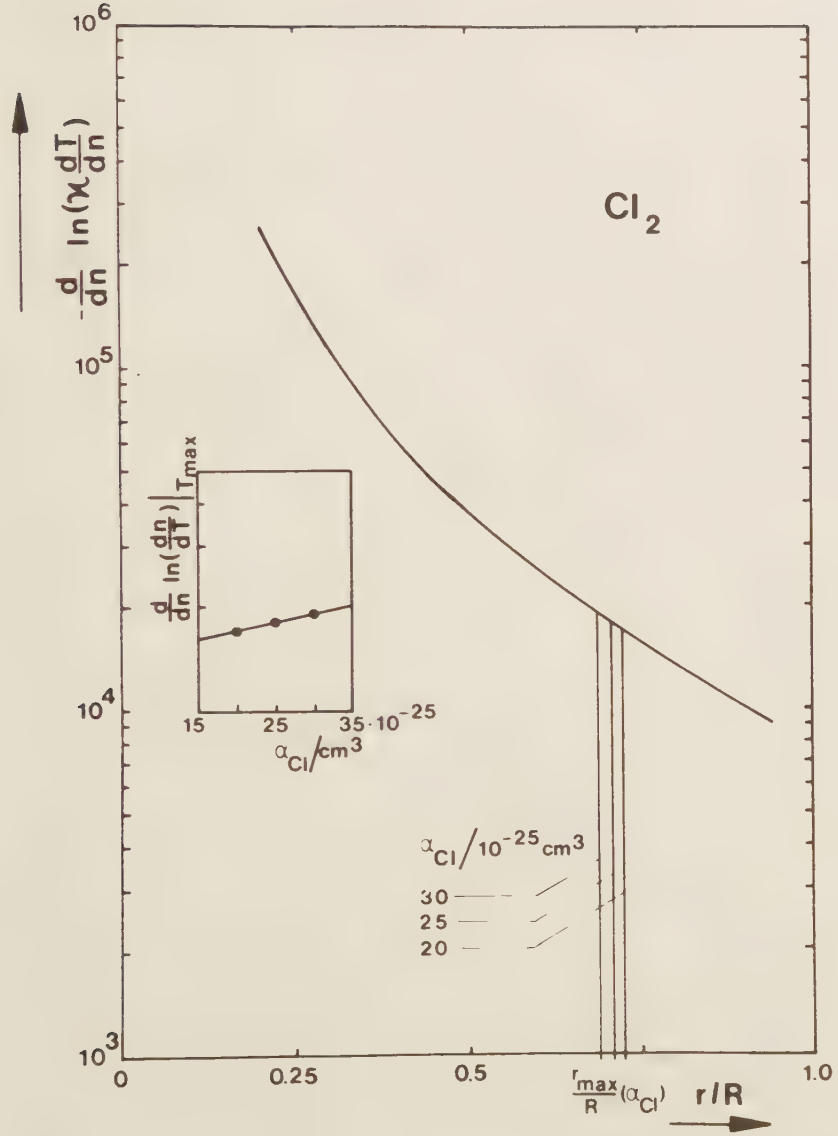


Abb. 4.5a: Zur Bestimmung von r_{max}
Chlor I=9A

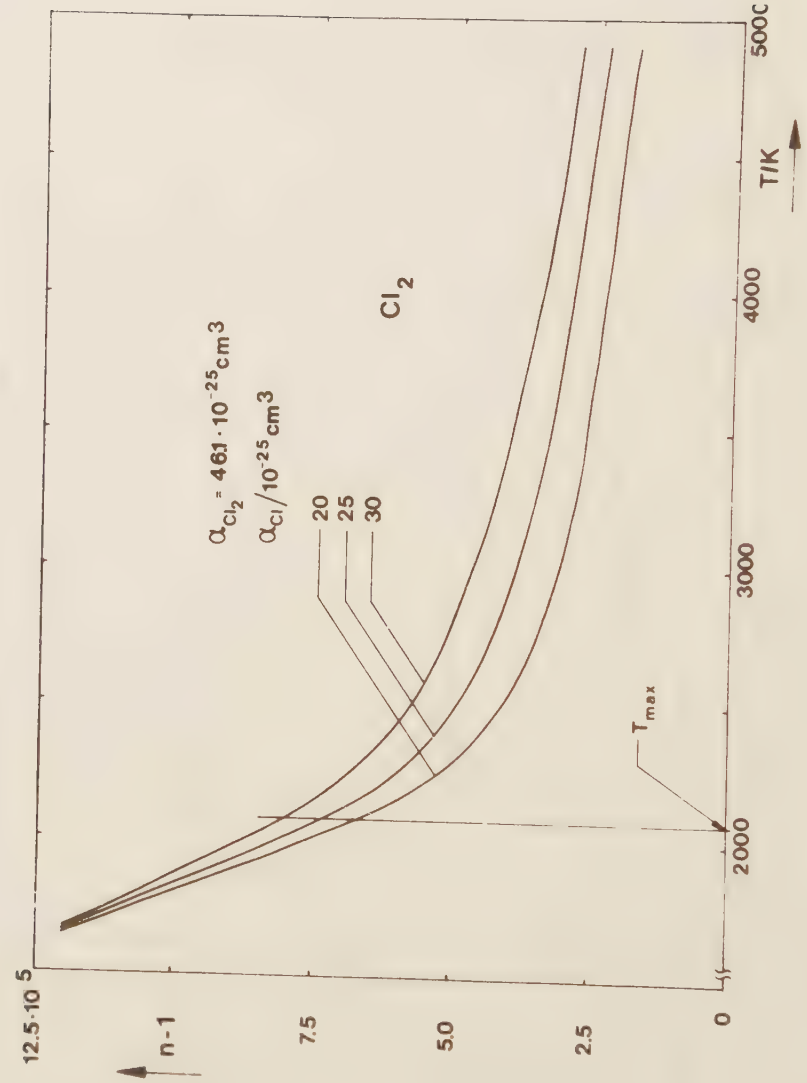


Abb. 4.5b: (n-1)(T) für drei Polarisierbarkeiten des Chloratoms

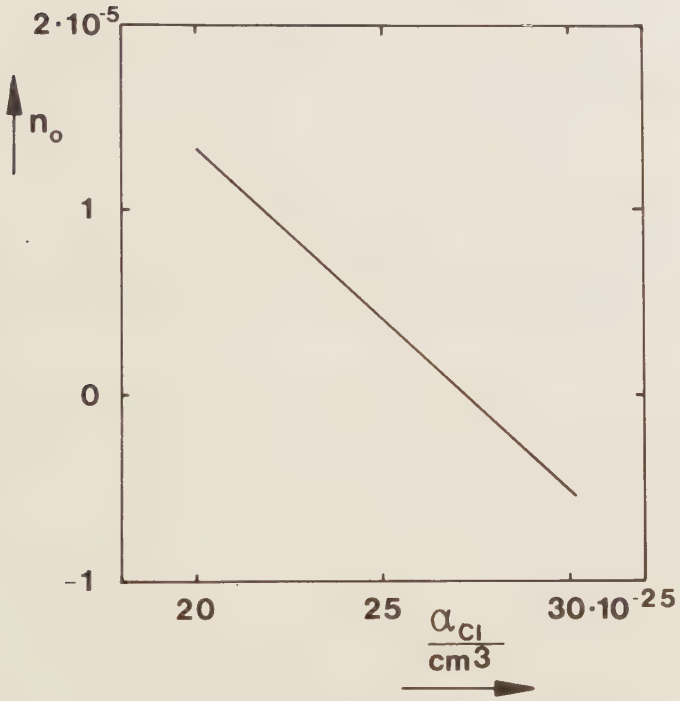


Abb. 4.6: n_o als Funktion von α_{Cl}

4.4.2.3 Bestimmung der atomaren Polarisierbarkeit α_A von Chlor

Für die endgültige Bestimmung der atomaren Polarisierbarkeit α_A von Chlor kann der Verlauf der Reaktionswärmeleitfähigkeit in den Flanken der Kurve beiderseits des Maximums mitbenutzt werden. Für diesen haben wir mit Gl. 4.20 eine theoretische

Beschreibung. Im Dissoziationsgebiet gibt es zur gesamten Wärmeleitfähigkeit zwei Beiträge

$$\kappa = \kappa_{\text{Reaktion}} + \kappa_{\text{Kontakt}} \tag{4.32}$$

Die Kontaktwärmeleitfähigkeit besitzt nur eine schwache Temperaturabhängigkeit ($\propto \sqrt{T}$), so daß ihre Temperaturableitung vernachlässigt werden kann. Somit gilt

$$\frac{d\kappa}{dT} \approx \frac{d\kappa_{\text{Reaktion}}}{dT} \tag{4.33}$$

wodurch ein Vergleich der experimentellen Temperaturableitung mit der theoretischen ohne Einfluß der Kontaktwärmeleitfähigkeit möglich ist.

Wir wollen nun die Ableitung der experimentell bestimmten Wärmeleitfähigkeit $d\kappa/dT$ aus Gl. 4.26 herleiten und dann $d\kappa_{\text{Reakt}}/dT$ aus Gl. 4.20 angeben.

Zunächst Gl. 4.26

$$\frac{d \ln \kappa \frac{dT}{dn}}{dn} = \frac{\frac{d}{dn}\left(\kappa \frac{dT}{dn}\right)}{\kappa \frac{dT}{dn}} \tag{4.34}$$

Mit der Ketten- und Produktregel erhalten wir

$$\frac{d \ln \kappa \frac{dT}{dn}}{dn} = \frac{\frac{d\kappa}{dT}\left(\frac{dT}{dn}\right)^2 + \kappa \frac{d^2T}{dn^2}}{\kappa \frac{dT}{dn}} \tag{4.35}$$

Diese Gleichung können wir nach $d\kappa/dT$ auflösen und erhalten somit

$$\frac{d\kappa}{dT} = \left(\frac{d}{dn} \ln \kappa \frac{dT}{dn} - \frac{d^2T/dn^2}{dT/dn} \right) \kappa \frac{dT}{dn} \left(\frac{dT}{dn}\right)^{-2} \tag{4.36}$$

Mit der Beziehung $\frac{d^2T}{dn^2} = -\frac{d^2n}{dT^2} / \left(\frac{dn}{dT}\right)^3$ können wir die letzte Gleichung auf bekannte Größen zurückführen und erhalten

$$\frac{d\kappa}{dT} = \left(\frac{d}{dn} \ln \kappa \frac{dT}{dn} + \frac{d^2n/dT^2}{(dn/dT)^2} \right) \kappa \frac{dT}{dn} \left(\frac{dn}{dT}\right)^2 \tag{4.37}$$

Hierin sind $\kappa\frac{dT}{dn}$ und $\frac{d}{dn}\ln\kappa\frac{dT}{dn}$ Größen, die aus der Messung bestimmt werden. $\frac{d^2n}{dT^2}/(\frac{dn}{dT})^2$ und $(\frac{dn}{dT})^2$ dagegen sind berechnete Größen mit α_A als Parameter.

Die Temperaturabhängigkeit der Wärmeleitfähigkeit ergibt sich gemäß Gl. 4.20 - 4.22 explizit zu

$$\frac{d\kappa_{Reakt}}{dT}\,Q_{AM}^{11} = \frac{N_A\,N_M}{(N_A+2N_M)^2}\,\frac{3}{8}\sqrt{\frac{3\pi}{4m_A kT}}\,\frac{\Delta h}{T^2} \cdot \{\frac{(2N_M-N_A)(N_A+N_M)}{(N_A+2N_M)^2}\,\frac{(\Delta h)^2}{kT} - \frac{3\Delta h}{2} + kT\} \qquad (4.38)$$

In dieser Beziehung ist der Stoßquerschnitt Q_{AM}^{11} noch unbestimmt. Dieser hängt aber nur schwach von der Temperatur ab, so daß wir ihn über dem hier interessierenden Temperaturbereich wie bei der Bestimmung von r_{max} als konstant annehmen können.

In Abb. 4.7 ist eine experimentelle $\frac{d\kappa}{dT}\big|_{\alpha_A}$ - Kurve für drei verschiedene Polarisierbarkeiten gegen die Temperatur aufgetragen. Die Kurven schneiden bei T_{max} die Nullinie. Die Abhängigkeit von α_A ist unterhalb von T_{max} weniger stark ausgeprägt als oberhalb von T_{max}. Der Grund ist der unterschiedliche Beitrag der Atome zur gesamten Gasdichte in diesem Temperaturbereich

Um die atomare Polarisierbarkeit zu bestimmen, wird nun folgendermaßen vorgegangen: Zunächst wählen wir α_A frei und passen die theoretische Kurve durch die Wahl von Q_{Cl,Cl_2}^{11} an den linken Ast der experimentellen Kurve unterhalb von T_{max} an. Finden wir dann auch auf dem rechten Ast eine gute Übereinstimmung zwischen der theoretischen und experimentellen Kurve, so haben wir das richtige α_A gewählt. Die beste Übereinstimmung ergibt sich bei Chlor für

$$\alpha_{Cl} = 25\cdot10^{-25}\ cm^3$$

$$Q_{Cl,Cl_2}^{11} = 36\cdot10^{-16}\ cm^2$$

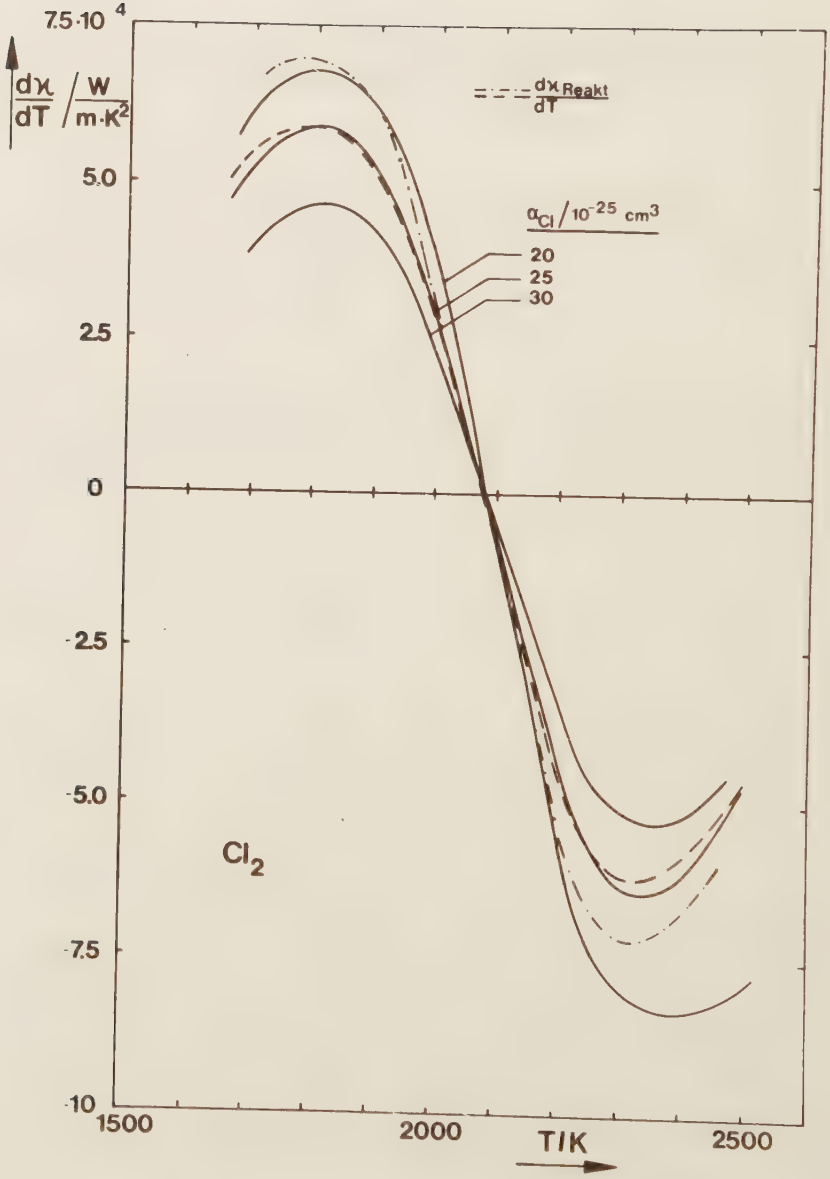


Abb. 4.7: —— $\frac{d\kappa}{dT}\Big|_{\alpha_A}$ für drei Polarisierbarkeiten α_A gegen T aufgetragen.

---- $\frac{d\kappa_{Reakt}}{dT}$ (T) mit $Q^{11}_{Cl,Cl_2} = 3.6 \cdot 10^{-15}$ cm^2

-.-.- $\frac{d\kappa_{Reakt}}{dT}$ (T) mit Q^{11} = 4.3·10^{-15} cm^2

4.5 Wärmeleitfähigkeit

Mit der nun bekannten atomaren Polarisierbarkeit von Chlor $\alpha_{Cl}=2{,}5\cdot10^{-24}$ cm^3 und der additiven Brechungsindexkonstanten n_o kann der radiale Temperaturverlauf für die beiden Testgase im Bogengefäß bei verschiedenen Bogenströmen angegeben werden.

In Abb. 4.8 ist zunächst der Temperaturverlauf von O_2 über dem normierten Radius aufgetragen. Die Achsentemperaturen sind in einem anderen Experiment spektroskopisch bestimmt worden /20/.

Abb. 4.9 gibt den radialen Temperaturverlauf in Chlor wieder. Auch hier sind spektroskopisch bestimmte Achsentemperaturen angegeben /21/.

Mit der bekannten radialen Temperaturverteilung wird die Wärmeleitfähigkeit nach Gl. 4.24 ausgewertet. Der Verlauf der Wärmeleitfähigkeit von Sauerstoff ist in Abb. 4.10 dargestellt. Bis 1500 K sind von Geier und Schäfer /4/ übernommene Daten eingetragen. Die eigenen Messungen schließen gut an diese Messungen an. Im Reaktionsgebiet verläuft die κ-Kurve aber etwas unter dem von Yos /3/ theoretisch bestimmten Verlauf. Oberhalb des Dissoziationsgebietes stimmen die Messungen allerdings gut mit den berechneten Werten überein. Offensichtlich ist der Stoßquerschnitt Q^{11}_{O,O_2} von Yos zu niedrig ermittelt worden, da die Abweichungen zwischen Theorie und Experiment lediglich im Dissoziationsbereich erkennbar sind. Oberhalb des Dissoziationsbereiches liegen von Herrmann /5/ ermittelte experimentelle Daten vor. Bei 6000 K stimmt die von ihm ermittelte Wärmeleitfähigkeit mit dem eigenen Ergebnis überein. Zum Vergleich mit dem von Herrmann bestimmten Wärmestrompotential S bei 6000 K

$$S = \int_0^T \kappa \, dT$$

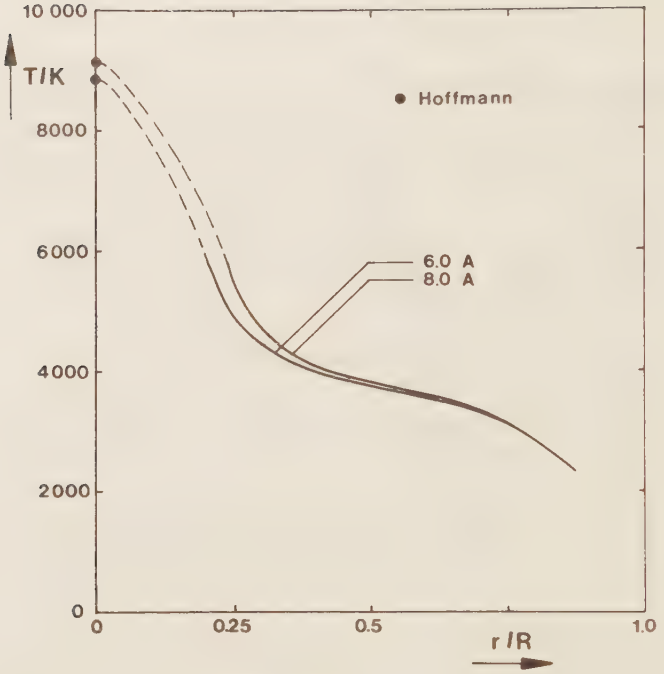


Abb. 4.8: T(r/R) Sauerstoff

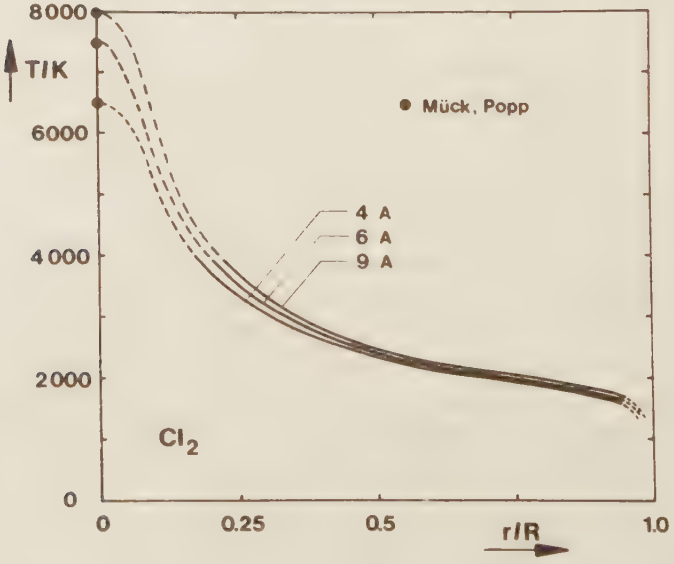


Abb. 4.9: T(r/R) Chlor (4 A,R=6 mm; 6und 9 A, R=9 mm)

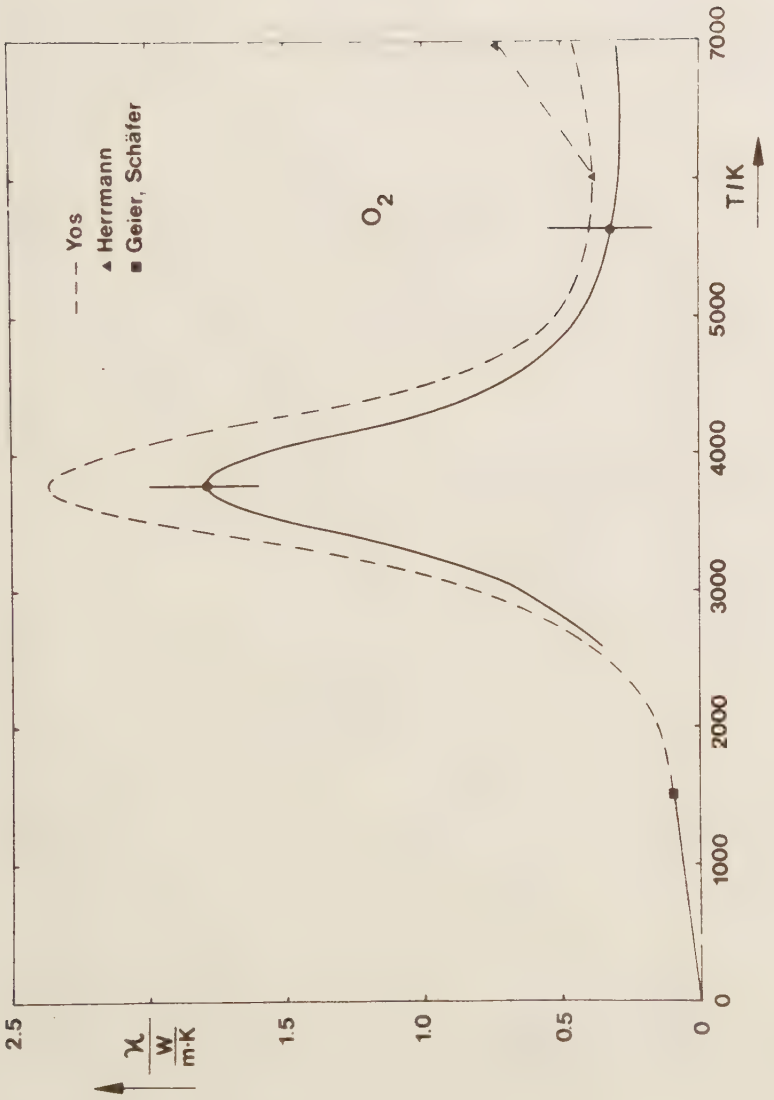


Abb. 4.10: Wärmeleitfähigkeit von Sauerstoff bei Atmosphärendruck

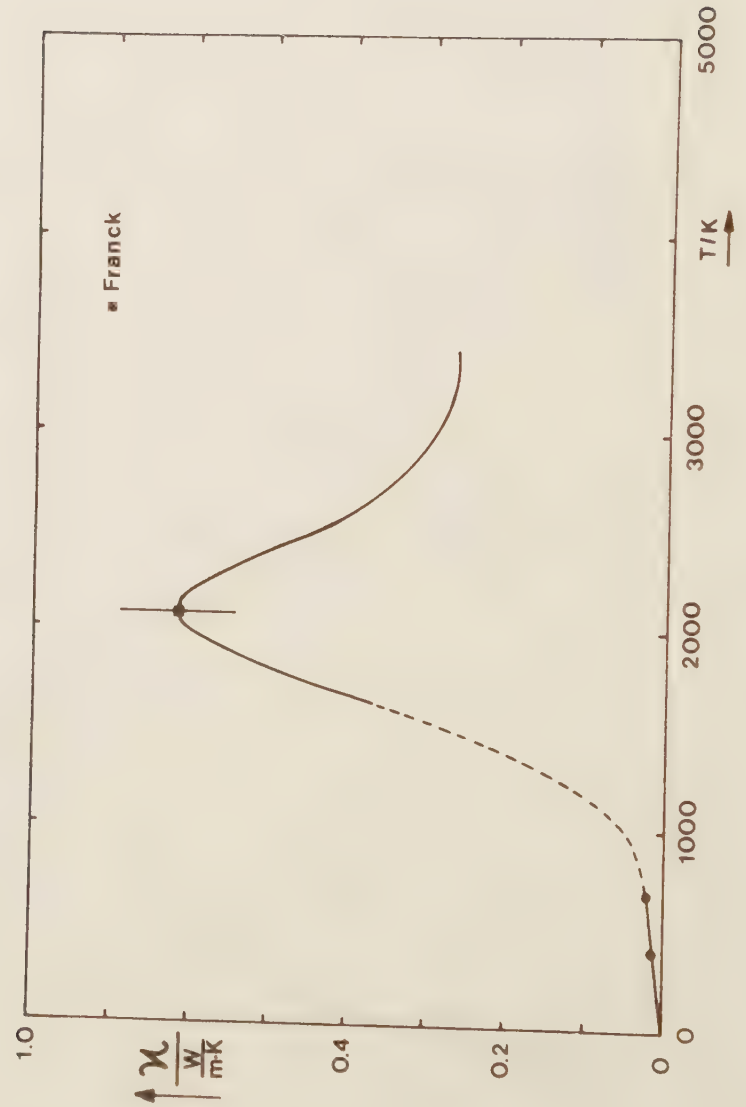


Abb. 4.11: Wärmeleitfähigkeit von Chlor bei Atmosphärendruck

wurde der experimentell bestimmte Verlauf der Wärmeleitfähigkeit bis 6000 K numerisch integriert. Auch hierin stimmen die Daten überein, womit die niedrigere Wärmeleitfähigkeit gegenüber der Theorie im Dissoziationsbereich bestätigt wird.

In Abb. 4.11 ist der Verlauf der Wärmeleitfähigkeit von Cl_2 von 0-3500 K aufgetragen. Bis 700 K sind von Franck /1/ bestimmte Daten eingetragen. Im Bereich zwischen 700 K und 1500 K ist die Wärmeleitfähigkeit interpoliert worden. Dieser Temperaturbereich liegt sehr nahe an der Bogengefäßwand, wo die interferometrische Meßmethode nicht angewendet werden konnte.

Aus der in Abschnitt 4.4.2.3 für Chlor beschriebenen Anpassung der theoretischen $d\kappa_{Reakt}/dT$ Kurve an die experimentell ermittelte Kurve folgt

$$Q^{11}_{O,O_2} = 24 \cdot 10^{-16} \text{ cm}^2$$

$$Q^{11}_{Cl,Cl_2} = 36 \cdot 10^{-16} \text{ cm}^2$$

4.6 Fehlerdiskussion

4.6.1 Systematische Fehler

Systematische Fehler dieser Messung betreffen die Voraussetzungen, die bei der Bestimmung des Brechungsindexverlaufes und seiner Ableitung und die bei der Auswertung der Leistungsbilanz Gl. 4.2 gemacht werden.

Die systematischen Fehler, die bei der Bestimmung des Brechungsindexverlaufes entstehen, sind in Abschnitt 3.4 abgehandelt worden und können hier vernachlässigt werden.

Die Voraussetzungen bei der Aufstellung der Leistungsbilanz sind:

1. Der Beitrag der Strahlung zum Energietransport kann vernachlässigt werden.

2. Die Annahme lokalen thermischen Gleichgewichtes (LTG) wird durch die Temperaturgradienten nicht in Frage gestellt.

Durch Messung der Strahlungsleistung des Chlorbogens konnte gezeigt werden, daß der Beitrag der transparent emittierten Strahlung zur Leistungsabfuhr vernachlässigt werden kann. Beim Sauerstoffbogen ist diese Bedingung ebenfalls erfüllt, da dessen Strahlungsemission wesentlich niedriger als die des Cl_2-Bogens ist.

Inwieweit in den kälteren Außenbereichen des Bogengefäßes Strahlung reabsorbiert wird, ist nicht einfach zu bestimmen. Bei Bögen gleicher Leistung, die in Gefäßen mit verschiedenen Durchmessern brennen, ändert sich allerdings die Dicke der absorbierenden Gasschicht und damit die absorbierte Strahlungsleistung. Dies führt zu systematischen Abweichungen der Ergebnisse bei verschiedenen Gefäßdurchmessern. Im

Rahmen der Meßgenauigkeit wurden keine Unterschiede in den Ergebnissen für Chlor beobachtet, die an Rohren mit 12 mm und 18 mm Ø gewonnen wurden.

Die Annahme von lokalem thermischen Gleichgwicht ist hier voll gerechtfertigt. Auch bei den höchsten Temperaturgradienten ist die Temperaturänderung innerhalb einer freien Weglänge zu vernachlässigen ($\frac{\Delta T}{T} < 10^{-4}$).

Auch im Bogenplasma ist der Unterschied zwischen Elektronen und Gastemperatur klein (<10%), wie für Chlor- /21/ und Sauerstoffbögen /20/ nachgewiesen wurde.

Bei der Bestimmung der Temperatur T_{max} des Wärmeleitfähigkeitsmaximums wurde der Beitrag der Kontaktwärmeleitfähigkeit vernachlässigt. Ihr leichter Anstieg führt aber zu einer Verschiebung von T_{max} zu höheren Temperaturen. Für Sauerstoff kann die Verschiebung aufgrund der vorliegenden theoretischen Daten /3/ leicht abgeschätzt werden. Sie beträgt dort ca. 5 K und kann damit vernachlässigt werden.

4.6.2 Fehler durch Meßungenauigkeiten

Die Genauigkeit der interferometrischen Messungen wird vor allem durch Fluktuationen in den Endräumen des Entladungsgefäßes begrenzt, die bei der Differenzbildung nicht herausfallen. Hinzu kommen Fehler, die dadurch zustande kommen, daß die gekürzten Entladungsrohre nicht beliebig genau repositioniert werden können und beim Kürzen der Rohre trotz der optischen Kontrolle kleine Keilfehler entstehen. Zudem werden die Bögen durch die Horizontalkomponente des Erdmagnetfeldes leicht abgelenkt. Die letzten drei Fehler machen sich vor allem durch eine Unsymmetrie in den Radialverteilungen bemerkbar und werden durch die Mittelung zwischen den Meßwerten zu beiden Seiten der Achse beseitigt.

Die verbleibenden Fehler wurden dadurch abgeschätzt, daß für jede Kombination von Entladungsparametern mehrere Interferogramme aufgenommen und unabhängig voneinander ausgewertet wurden.

Eine weitere Fehlerquelle ist die Messung der Bogenleistung pro Längeneinheit L=I·E. Bogenbewegungen an den Elektroden und Schwankungen im Gasdurchsatz übertragen sich auf die Bogenspannung und führen damit zu statistischen Schwankungen bei der Bestimmung der Bogenfeldstärke E. Durch Mittelwertbildung konnte L mit einer Genauigkeit von 5% bestimmt werden.

Der Fehler in der Bogenleistung geht unmittelbar in den Absolutwert der Wärmeleitfähigkeit und des Querschnittes Q_{AM}^{11} ein, aber nicht in die Temperaturbestimmung und in die Ermittlung von α_{Cl}.

Aufgrund der kleinen Temperaturgradienten im Dissoziationsgebiet (Abb. 4.9 und Abb. 4.10) hat die Wahl von r_{max} in diesem Bereich keinen großen Einfluß auf den Temperaturverlauf. Erst zur Bogenachse hin bzw. an der Gefäßwand, wo die Temperaturgradienten ansteigen, wird der Einfluß stärker

Die atomare Polarisierbarkeit α_A wirkt sich erst bei Temperaturen, die deutlich größer als T_{max} sind auf die Meßergebnisse aus. In diesem Bereich wird die Atomdichte so groß, daß die im Vergleich zu den Molekülen kleine atomare Polarisierbarkeit wirksam wird. Der Aufhängepunkt r_{max} hängt bei Chlor nur ganz schwach von der atomaren Polarisierbarkeit ab.

Die Wärmeleitfähigkeit reagiert in der Nähe des Maximums jedoch empfindlich auf die Wahl von r_{max}. Nach Gl. 4.4

$$\kappa = - \frac{L}{2\pi r} \cdot \frac{dr}{dT}$$

ist sie umgekehrt proportional zum Radius r.

Oberhalb des Maximums trägt zunehmend die Ungenauigkeit in der Bestimmung der Polarisierbarkeit der Atome zur gesamten Unsicherheit bei. Zusätzlich wird die interferometrische Methode infolge der geringen Gasdichte bei höheren Temperaturen zunehmend unempfindlicher.

Da aufgrund der komplizierten Auswertung die Fortpflanzung der Fehler nur sehr schwer verfolgt werden kann, wurde für ihre Abschätzung die Streuung der Ergebnisse für die Wärmeleitfähigkeit aus den verschiedenen Einzelversuchen benutzt. Diese Streuung wird durch die Fehlerbalken in den Wärmeleitungskurven der Abb. 4.10 und 4.11 angegeben. Der Fehler im Maximum der Wärmeleitfähigkeit liegt bei 20%. Mit dem gleichen Fehler sind die Wirkungsquerschnitte behaftet. Der Fehler für die Polarisierbarkeit der Chloratome ergibt sich zu 10%.

5. Anhänge

A. Zur Auswertung der Differentialinterferogramme

Im Kap. 3.2 wurde eine einfache Beschreibung des differentialinterferometrischen Verfahrens angegeben. Hier soll nun die Beziehung zwischen dem Ort der Interferenzstreifen und dem Gradienten der optischen Weglänge für eine beliebige Position des Wollastonprismas beugungstheoretisch abgeleitet werden /22/, /23/. Die benutzten Bezeichnungen sind aus Abb. A1 ersichtlich

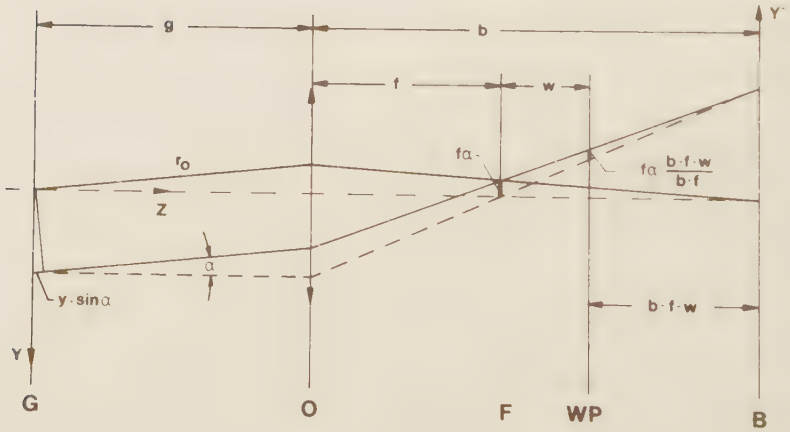


Abb. A1: Strahlengang eines Differentialinterferometers mit Wollastonprisma zur Bestimmung der optischen Wege

Mit O(y) wird die Objektfunktion und mit B(y') die Bildfunktion bezeichnet. Diese geben die Lichterregung in der

Objekt- bzw. in der Bildebene nach Amplitude und Phase an. Wir gehen von einer gleichförmigen Ausleuchtung des Phasenobjektes und damit einer konstanten Amplitude der Lichtwelle aus. Die Wellenfront wird durch den optischen Weg S(y) als Funktion der Querkoordinate beschrieben, so daß wir

$$O(y) = C \cdot \exp -j \frac{2\pi}{\lambda} S(y) \qquad (A1)$$

angeben können.

Die Querkoordinaten y und y' in der Objekt- bzw. in der Bildebene sind durch das Abbildungsverhältnis miteinander verknüpft

$$\frac{y}{y'} = \frac{f}{b - f}$$

Wir beschränken uns hier auf jeweils nur eine Querkoordinate, da für die Beschreibung nur die "Aufspaltebene" des Wollastonprismas von Bedeutung ist.

Zunächst beschreiben wir in der Raumfrequenzebene (Brennpunktsebene) die Lichterregung, die hier nach den in der Objektebene vorliegenden Winkeln α "sortiert" ist. Ein Stück dy der Objektebene zwischen y und y+dy liefert zum Feld der Lichtwelle in der Brennebene den Beitrag

$$dE(f\alpha) = O(y) \exp -j \frac{2\pi}{\lambda} (r_o + y \sin\alpha)\, dy \qquad (A2)$$

konstante Amplitudenfaktoren haben wir dabei weggelassen, so wie wir auch den konstanten Phasenfaktor $\exp -j(2\pi/\lambda)r_o$ unberücksichtigt lassen.

Wenn wir die "Richtvariable" $\gamma = \sin\alpha/\lambda$ einführen und außerdem $f_\alpha = f \cdot \mathrm{tg}(\mathrm{arc}\ \sin\gamma\lambda)$ benutzen, so erhalten wir

für die Lichterregung in der Brennebene

$$E(\gamma) = \int_{-\infty}^{+\infty} O(y) \exp -j(2\pi\, y\gamma)\, dy \qquad (A3)$$

Die Integrationsgrenzen können hier von $-\infty$ bis $+\infty$ gewählt werden, da $O(y)$ außerhalb des zu untersuchenden Gesichtsfeldes verschwindet. Für den Fall, daß der Lichtweg zwischen Objekt- und Bildebene nicht behindert wird, kann die Bildfunktion durch Fourier-Rücktransformation in die Objektebene erhalten werden, wobei Bild und Objektfunktion sich nur durch ihre Koordinaten unterscheiden.

$$B(y') = O(y'\frac{f}{b-f}) = O(y) \qquad (A4)$$

Es folgt daher

$$B(y') = \int_{-\infty}^{+\infty} E(\gamma) \exp j(2\pi \frac{f}{b-f}\, y'\gamma)\, d\gamma \qquad (A5)$$

Bei einem Eingriff in der Brennebene wird die Beugungsfunktion $E(\gamma)$ durch ihr Produkt mit der Eingriffsfunktion $Q(\gamma)$ ersetzt. Somit kann allgemein die Bildfunktion aus der Objektfunktion berechnet werden

$$B(y') = \int_{y=-\infty}^{+\infty} \int_{\gamma=-\infty}^{+\infty} Q(\gamma)\, O(y) \cdot \exp j(2\pi\gamma(y'\frac{f}{b-f} - y)\, dy\, d\gamma \qquad (A6)$$

Erfolgt der Eingriff außerhalb der Brennebene im Abstand w von ihr, so ist es einesteils notwendig andererseits aber auch ausreichend, die Eingriffsfunktion Q als Funktion von Winkel und Ort in der Objektebene zu beschreiben.

$$Q = Q(\gamma, y)$$

Wir wollen nun die Eingriffsfunktion des Wollastonprismas im Abstand w von der Brennebene berechnen.

Die beiden aus dem Wollastonprisma austretenden Lichtbündel haben eine Phasendifferenz, die von der Querkoordinate ξ in ihm abhängt (s. Abb. 3.5). Die optischen Wege im Wollastonprisma sind

$$\sigma_{OE,EO} = (n_O + n_E)\,\frac{d}{2} \pm \frac{\varepsilon}{2}\,\xi \qquad \text{(A7)}$$

woraus sich als Eingiffsfunktion $Q(\gamma,y)$ ergibt

$$Q(\gamma,y) = \exp j\,\frac{2\pi}{\lambda}(\sigma_o \pm \frac{\varepsilon}{2}\,\xi(\gamma,y)) \qquad \text{(A8)}$$

Aus der Abb. A1 können wir ξ ableiten

$$\xi = y\,\frac{w}{f} + tg\alpha\cdot f\,\frac{b-f-w}{b-f} \qquad \text{(A9)}$$

$$= y\,\frac{w}{f} + tg\alpha\;\;\frac{a}{\varepsilon}$$

mit $a = \varepsilon\cdot f\,\frac{b-f-w}{b-f}$

Der Phasenfaktor mit σ_o in Gl. A8 kann hier weggelassen werden, da er für alle Bildpunkte gleich ist. Wenn wir noch berücksichtigen, daß hier die Näherung $tg\alpha \approx \sin\alpha$ gilt, so erhalten wir durch Einsetzen von Gl. A8 in Gl. A6

$$B_{1,2}(y') = \int_{y=-\infty}^{+\infty}\int_{=-\infty}^{+\infty} O(y)\,\exp \pm j\,\frac{2\pi}{\lambda}\,(\frac{\varepsilon}{2}\,y\,\frac{w}{f})$$

$$\cdot\,\exp j\,2\pi\gamma(y'\frac{f}{b-f} - y \pm \frac{a}{2})\,dy\,d\gamma \qquad \text{(A10)}$$

Führen wir die Integration über γ aus, so ergibt sich die δ-Funktion im Integranden

$$B_{1,2}(y') = \int_{y=-\infty}^{+\infty} O(y)\,\exp \pm j\,\frac{2\pi}{\lambda}(\frac{\varepsilon}{2}\,y\,\frac{w}{f})\;\delta(y'\frac{f}{b-f} \pm \frac{a}{2} - y)\,dy$$

Setzen wir nun $y'\,f/(b-f) = y = y'' \pm \frac{a}{2}$

so kann die Integration über y ausgeführt werden

$$B_{1,2}(y') = \int_{-\infty}^{+\infty} O(y) \exp \pm j \frac{2\pi}{\lambda}(\frac{\varepsilon}{2} y \frac{w}{f}) \delta(y''-y) dy$$

$$= O(y\pm\frac{a}{2}) \exp \pm j \frac{2\pi}{\lambda}(\frac{\varepsilon}{2} (y\pm\frac{a}{2}) \frac{w}{f}) \qquad (A11)$$

Die Intensität in der Bildebene ergibt sich somit als Betragsquadrat der Summe beider Wellen, wobei wir für O(y) auf Gl. A1 zurückgreifen.

$$|B_1(y') + B_2(y')|^2 =$$

$$= 2 C^2 \{1 + \cos \frac{2\pi}{\lambda}(S(y+\frac{a}{2})-S(y-\frac{a}{2}) - y\frac{w}{f}\varepsilon)\}$$

$$= 2 C^2 \{1 + \cos \frac{2\pi}{\lambda}(a \frac{dS}{dy} - \varepsilon y \frac{w}{f})\} \qquad (A12)$$

Für die Intensitätsmaxima gilt die Bedingung

$$n = \frac{a}{\lambda} \frac{dS}{dy} - \frac{\varepsilon}{\lambda} y \frac{w}{f} \qquad (n=0,1,2...) \qquad (A13)$$

$\varepsilon wy/f = \varepsilon wy'/b - f$ ist die Wegdifferenz zwischen einem Punkt in der Bildebene und zwei virtuellen Lichtquellen in der bildseitigen Brennebene mit dem Abstand εw.

Bestimmen wir den Ort der Interferenzstreifen zunächst ohne Phasenobjekt, d. h. $\frac{dS}{dy}=0$, so erhalten wir die Bedingung

$$n \lambda = \varepsilon y_u \frac{w}{f} \qquad (A14a)$$

wobei y_u die Koordinate des Streifens n ist. Den gleichen Streifen finden wir mit Phasenobjekt, d. h. $\frac{dS}{dy}\neq 0$, verschoben bei y_d wieder

$$n \lambda = a \frac{dS}{dy}(y_d) - \varepsilon y_d \frac{w}{f} \qquad (A14b$$

Durch Gleichsetzen von Gl. A14a und Gl. A14b erhalten wir

$$\frac{dS}{dy}(y_d) = (y_d - y_u) \frac{\varepsilon w}{a f} \qquad (A15)$$

Bezeichnen wir mit Δy_u den Abstand der "Grundstreifen" ohne Phasenobjekt, so erhalten wir mit Gl. A14a und der Bedingung $\Delta n=1$

$$\Delta y_u = y_{u1} - y_{u2} = \frac{\lambda f}{\varepsilon w}$$

und damit

$$\frac{\varepsilon w}{f} = \frac{\lambda}{\Delta y_u}$$

Dies in A15 eingesetzt ergibt die Beziehung

$$\frac{dS}{dy} (y_d) = \frac{y_d - y_u}{\Delta y_u} \frac{\lambda}{a} \qquad \text{(A16)}$$

die zur Auswertung der Interferogramme benutzt werden kann. Meßgrößen sind der Ort der verschobenen Streifen y_d, der Ort des zugehörigen Grundstreifens y_u, der Grundstreifenabstand Δy_u und der Abstand a zweier Strahlen in der Objektebene, die in der Bildebene interferieren.

B. Berechnung der Gaszusammensetzung

Das Molekülgas zerfällt bei den Temperaturen, die im Entladungsrohr herrschen, in eine Reihe von Komponenten. Ihre Teilchenzahldichten werden unter der Voraussetzung thermischen Gleichgewichtes im Temperaturbereich zwischen 600 - 10 000 K berechnet.

Die beiden wichtigsten Zerfallsprozesse sind

1. die thermische Dissoziation von Molekülen in Atome

$$X_2 + E_D \rightleftarrows 2X$$

2. die thermische Ionisation der Atome

$$X + E_{Ai} \rightleftarrows X^+ + e^-$$

Für die Berechnung der 4 Komponenten X_2, X, X^+ und e^- stehen die Massenwirkungsgesetze für die beiden aufgeführten Prozesse zur Verfügung sowie die Quasineutralitätsbedingung und die Zustandsgleichung für ideale Gase

$$N_{X^+} = N_{e^-} \; ; \qquad \sum_\nu N_\nu = \frac{p}{kT}$$

Außerdem werden die Teilchenzahldichten des positiven Molekülions X_2^+, des negativen Molekülions X_2^- und des negativen Atomions X^- in der Rechnung berücksichtigt und dafür die Massenwirkungsgesetze für folgende drei Prozesse herangezogen

$$X_2 + E_{Mi} \rightleftarrows X_2^+ + e^-$$

$$X_2 + e^- \rightleftarrows X_2^- + E_{Ma}$$

$$X + e^- \rightleftarrows X^- + E_{Aa}$$

In die Massenwirkungsgesetze gehen die Zustandssummen Z der einzelnen Komponenten ein. Die Zustandssummen für

Cl, Cl^+, O, O^+ wurden bei Drawin /24/ entnommen. Die Zustandssummen für Cl_2, O_2, O_2^+ wurden mit folgenden Beziehungen

$$\ln Z_i = \frac{S}{R} - \frac{H}{RT} - \ln Z_{tr}$$

$$Z_{tr} = \left(\frac{2\pi\, m_M\, kT}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{kT}{p}$$

aus den Daten für die Entropie S und Enthalpie H /25/ ermittelt. Für Cl_2^+, Cl_2^- und O_2^- wurden die gleichen Zustandssummen wie für Cl_2 und O_2 benutzt. Die Zustandssumme für O^- und Cl^- ist

$$Z_{X^-} = 1$$

Die Teilchenzahldichten wurden mit einem von Frie /26/ entwickelten Rechenprogramm berechnet. In Abb. B1 und Abb. B2 sind die Ergebnisse für Chlor und Sauerstoff angegeben.

Wie aus den Abbildungen zu sehen ist, sind die Teilchenzahldichten der Molekülionen und negativen Ionen mindestens um zwei Größenordnungen kleiner als die der Neutralteilchen. Sie brauchen daher weder beim Brechungsindex noch bei der Wärmeleitfähigkeit berücksichtigt werden. Daher ist auch eine genauere Berechnung der Zustandssummen für Cl_2^+ und Cl_2^- bzw. O_2^- im Rahmen der gestellten Aufgabe unnötig.

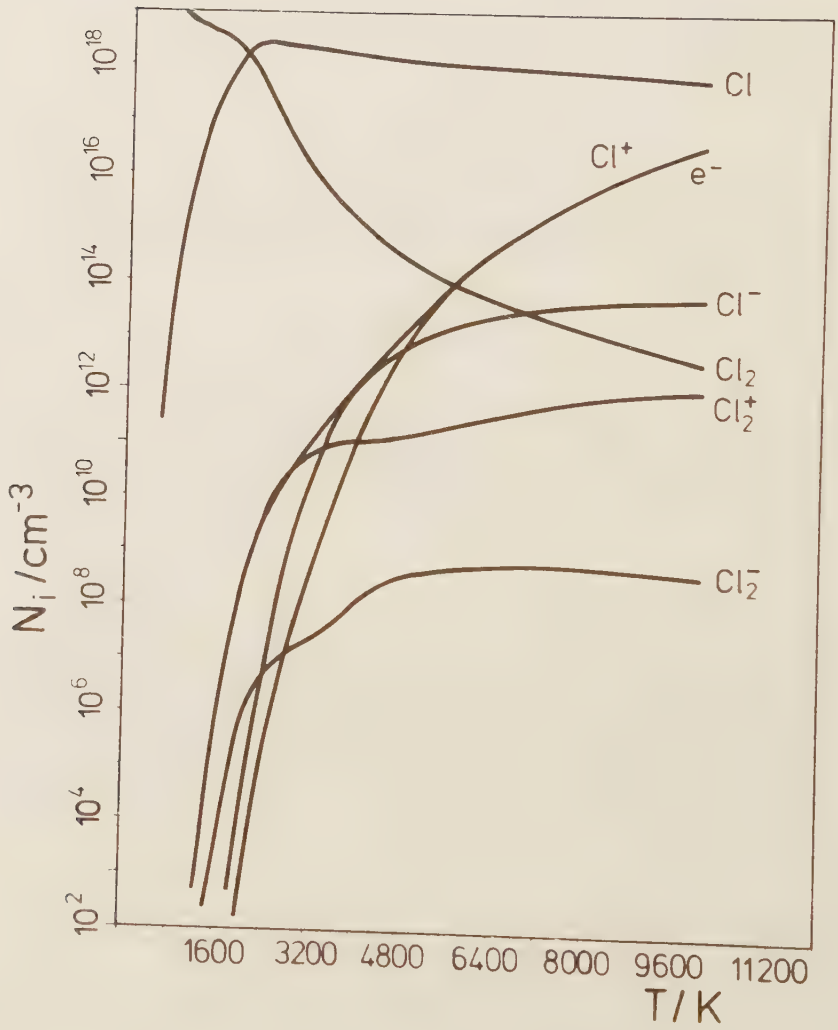


Abb. B1: Teilchenzahldichten Chlor

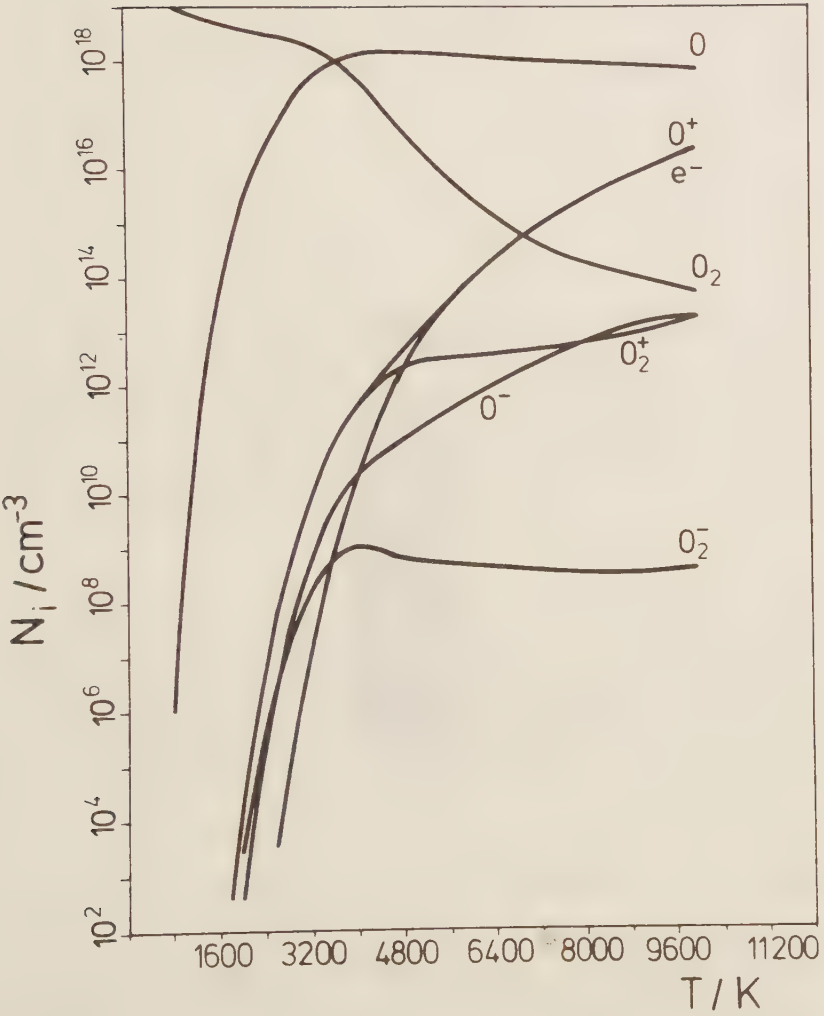


Abb. B2: Teilchenzahldichten Sauerstoff

C. Reaktionswärmeleitfähigkeit

Infolge der Partialdruckgradienten im Temperaturfeld
Abb. C1

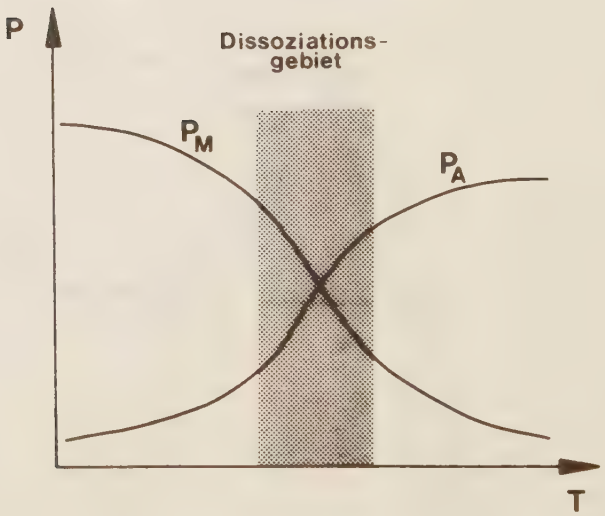


Abb. C1: Partialdrücke im Dissoziationsgebiet

werden Teilchenströme angetrieben, mit denen der Transport von Reaktionsenergie verbunden ist. Der Wärmestrom $\vec{q}$ durch eine Testfläche ergibt sich aus der Bilanz der mit den Teilchenströmen transportierten Enthalpie

$$\vec{q} = \vec{j}_M h_M + \vec{j}_A h_A \qquad (C1)$$

wobei h_M und h_A die mittlere Enthalpie pro Teilchen ist.

Zunächst wollen wir die Teilchenströme quantitativ angeben. Dazu gehen wir von den Schlüterschen Gleichungen /27/ aus, die die Kräftebilanz für die Teilchen beschreiben. In allgemeiner Form lauten sie für ein Gas aus 2 Komponenten

$$\begin{aligned} \rho_A \frac{d\vec{v}_A}{dt} + N_A N_M \varepsilon_{AM} (\vec{v}_A - \vec{v}_M) &= \rho_A \vec{F}_A - \text{grad } p_A - \rho_A q_A \frac{\text{grad } T}{T} \\ \rho_M \frac{d\vec{v}_M}{dt} + N_A N_M \varepsilon_{MA} (\vec{v}_M - \vec{v}_A) &= \rho_M \vec{F}_M - \text{grad } p_M - \rho_M q_M \frac{\text{grad } T}{T} \end{aligned} \qquad (C2)$$

Auf der rechten Seite stehen die antreibenden Kräfte auf die jeweilige Teilchensorte, der Reihenfolge nach sind dies äußere Kräfte wie z.B. die Schwerkraft oder magnetische Kraft, der Partialdruckgradient und die Termodiffusion. Auf der linken Seite steht einmal der Trägheitsterm und die Reibungskraft der Teilchensorte M auf die Teilchensorte A mit dem Volumenreibungskoeffizienten ε_{AM}.

Wir untersuchen einen stationären Zustand, deshalb kann der Trägheitsterm $\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \vec{v}\, \text{grad}\vec{v}$ gegenüber dem Reibungsterm vernachlässigt werden. Außerdem treten keine äußeren Kräfte auf, und schließlich ist die Thermodiffusion ein Effekt zweiter Ordnung. In unserem Fall reduzieren sich daher die Schlüterschen Gleichungen auf

$$\begin{aligned} N_A N_M \varepsilon_{AM} (\vec{v}_A - \vec{v}_M) &= - \text{grad } p_A \\ N_A N_M \varepsilon_{MA} (\vec{v}_M - \vec{v}_A) &= - \text{grad } p_M \end{aligned} \qquad (C3)$$

Da grad p_A=-grad p_M sind beide Gleichungen linear abhängig. Berücksichtigen wir dann, daß im stationären Fall die Gesamtmasse der durch eine Testfläche tretenden Teilchen sich nicht ändert, so gilt die Bedingung

$$N_A m_A \vec{v}_A + N_M m_M \vec{v}_M = 0 \qquad (C4)$$

Dies ist die Gleichung für die Massenerhaltung.

Da die Molekülmassen hier doppelt so groß wie die Atommassen sind, $m_M = 2m_A$, erhalten wir das Verhältnis der mittleren Geschwindigkeiten

$$\vec{v}_M = -\frac{N_A}{2\,N_M}\,\vec{v}_A \tag{C5}$$

Die Teilchenströme können dann explizit angegeben werden

$$\begin{aligned} \vec{j}_A &= N_A\,\vec{v}_A = -\frac{2}{2N_M + N_A}\,\frac{1}{\varepsilon_{AM}}\,\text{grad}\,p_A \\ \vec{j}_M &= N_M\,\vec{v}_M = \frac{1}{2N_M + N_A}\,\frac{1}{\varepsilon_{AM}}\,\text{grad}\,p_A \end{aligned} \tag{C6}$$

Die mittlere Enthalpie pro Teilchen sind für die beiden Gaskomponenten

$$\begin{aligned} h_A &= \frac{5}{2}\,kT + U_{iA} + \frac{1}{2}\,E_D \\ h_M &= \frac{5}{2}\,kT + U_{iM} \end{aligned} \tag{C7}$$

Dabei setzen sich die 5/2 kT aus 3/2 kT für die translatorische Energie und aus kT=pV für die Volumenarbeit zusammen.

Damit wird der Wärmestrom $\vec{q}$ aus Gl. C1

$$\vec{q} = N_A\vec{v}_A\,(\tfrac{5}{2}\,kT + U_{iA} + \tfrac{1}{2}\,E_D) + N_M\vec{v}_M(\tfrac{5}{2}\,kT + U_{iM}) \tag{C8}$$

Setzen wir die Ausdrücke aus Gl. C6 hier ein so erhalten wir

$$\vec{q} = -\frac{1}{2N_M+N_A}\,(\tfrac{5}{2}\,kT + 2U_{iA} - U_{iM} + E_D)\,\frac{1}{\varepsilon_{AM}}\,\text{grad}\,p_A$$

$\frac{5}{2}\,kT + 2U_{iA} - U_{iM} + E_D = \Delta H$ ist die Reaktionsenthalpie.

Benutzen wir noch das Fouriersche Gesetz $\vec{q}=-\kappa \mathrm{grad}T$ und berücksichtigen, daß $\frac{dp}{dr}=\frac{dp}{dT}\cdot\frac{dT}{dr}$ ist, so ergibt sich für die Reaktionswärmeleitfähigkeit

$$\kappa_{Reakt} = \frac{1}{2N_M+N_A}\ \Delta h\ \frac{1}{\varepsilon_{AM}}\ \frac{dp_A}{dT} \qquad (C10)$$

$\frac{dp_A}{dT}$ können wir aus dem Massenwirkungsgesetz wie in Gl. 4.15 bestimmen. Weiterhin liefert die kinetische Gastheorie /28/ für den Volumenreibungskoeffizienten ε_{AM}

$$\varepsilon_{AM} = \frac{8}{3}\sqrt{\frac{2kT}{\pi}\ \frac{\overline{m_A}\ \overline{m_M}}{m_A+m_M}}\ Q_{AM}^{11} \qquad (C11)$$

wobei Q_{AM}^{11} dem Stoßquerschnitt für zwei Kugeln mit $(r_1+r_2)^2\pi$ entspricht. Mit $m_A=\frac{1}{2}m_M$ ergibt sich dann aus Gl. C10 der Ausdruck für die Reaktionswärmeleitfähigkeit

$$\kappa_{Reakt} = \frac{N_A\ N_M}{(N_A+2N_M)^2}\ \frac{3}{8}\sqrt{\frac{3\pi}{4\ kT\ m_A}}\ \frac{(\Delta h)^2}{T}\ \frac{1}{Q_{AM}^{11}} \qquad (C12)$$

6. Literaturverzeichnis

/1/ E.U. Franck, Zeitschrift für Elektrochemie, 55, 636-647 (1951)

/2/ K.S. Yun, S. Weissmann, E.A. Mason, Phys. Fluids, 5, 672-678 (1962)

/3/ J. Yos, Transport Properties of N_2, H_2, O_2 and Air to 30 000 K, AVCO RAD-TM-67-7 (1963)

/4/ H. Geier, K. Schäfer, Allg. Wärmetechnik, 10, 70-5 (1961)

/5/ D. Herrmann, Messung der Transporteigenschaften von Mischungen von N_2 und O_2 einschließlich Luft im Lichtbogenplasma bis 14 000 K, Dissertation TU München (1980)

/6/ H. Wolter, Ann. Phys., 7, 182-192, 341-368 (1950)

/7/ K. Behringer, W. Kollmar, J. Mentel, Zeitschrift für Physik, 215, 127-151 (1968)

/8/ H.M. Smith (Hrsg.), Holographic Recording Materials, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York, S. 6 ff (1977)

/9/ M. Françon, S. Mallick, Polarization Interferometers, Wiley-Interscience, S. 25 ff (1971)

/10/ M. Born, E. Wolf, Principles of Optics, Pergamon Press, 5th Edition, S. 122 (1975)

/11/ C.M. Vest, Holographic Interferometry, John Wiley & Sons, New York, S. 255 ff (1979)

/12/ M. Born, E. Wolf, a. a. O., S. 87

/13/ F. Reif, Fundamentals of Statistical and Thermal Physics, Mc Graw-Hill, S. 360 ff (1965)

/14/ M. Atoji, J. Chem. Phys. 25, 174 (1956)

/15/ J. Thorhallsson, C. Fisk, S. Fraga, Theor. Chim. Acta 10, 388-392 (1968)

/16/ J.W. Cooper, J.B. Martin, Phys. Rev. 126, 1482-1488 (1962)

/17/ R.A. Alpher, D.R. White, Phys. Fluids 2, 153-161 (1959)

/18/ K.S. Yun, E.A. Mason, Phys. Fluids 5, 380-386 (1962)

/19/ E.W. Mc Daniel, E.A. Mason, The Mobility and Diffusion of Ions in Gases, Wiley New York, S. 343 ff (1973)

/20/ H. Hoffmann, das Spektrum des negativen Sauerstoffions, Dissertation TU München (1975)

/21/ G. Mück, H.-P. Popp, Z. Naturforsch. 23a, 1213-1220 (1968)

/22/ D.W. Branston, J. Mentel, Appl. Phys. 11, 241-246 (1976)

/23/ H. Wolter, Schlieren-, Phasenkontrast- und Lichtschnittverfahren, in Handbuch der Physik, Vol. 24, hrsg. von S. Flügge, Springer, Berlin, Göttingen, Heidelberg, S. 555-645 (1956)

/24/ H.W. Drawin, D. Felenbok, Data for Plasma in Local Thermodynamic Equilibrium, Gauthier-Villars, Paris (1965)

/25/ JANAF Thermochemical Tables, Second Edition (1971)

/26/ W. Frie, Zeitschrift für Physik 201, 269-294 (1967)

/27/ A. Schlüter, Z. Naturforsch. 5a, 72-78, 73-78 (1950) 6a, 73

/28/ S. Chapman, T.G. Cowling, The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases, Cambridge University Press, 3rd edition, S. 142, 162 f (1970)

Lebenslauf

15.5.1950	geboren in Berlin
1956-1960	Besuch der Grundschule in Zeuthen b. Berlin
1960-1961	Besuch der Volksschule in Köln-Höhenhaus
1961-1970	Besuch des Math.-Naturw. Gymnasiums, Köln-Mülheim
15.6.1970	Abitur
1970-1977	Studium der Physik an der RWTH Aachen
15.4.1977	Diplom-Prüfung
1977-1981	Wissenschaftlicher Assistent am Lehrstuhl für Allg. Elektrotechnik und Elektrooptik
seit 1.1.1982	Wissenschaftlicher Angestellter an obengenanntem Lehrstuhl

DER DRUCKER - Buscheystraße 138 - 4630 Bochum - Tel. (02 34) 70 41 16